Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 8

„There cannot be a language more universal and more simple, more free from errors and obscurities...more worthy to express the invariable relations of all natural things than mathematics. It interprets all phenomena by the same language, as if to attest the unity and simplicity of the plan of the universe, and to make still more evident that unchangeable order which presides over all natural causes“
(Joseph Fourier ; 1768-1830)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

8.1. (2 Punkte) Sei $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Was lässt sich über die Fourierkoeffizienten der Funktion f sagen, wenn f achsensymmetrisch oder f punktsymmetrisch ist.

8.2. (4 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest.

(a) Entwickleln Sie die Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cosh(ax)$ in eine Fourierreihe.

(b) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Votieraufgaben

8.3. Berechnen Sie die Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Reihe) für die angegebenen Funktionen

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & , -\pi \le x \le 0, \\ 1 & , 0 < x \le \pi, \end{cases}$

(b) $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi,\pi]$.

Geben Sie jeweils die Grenzfunktion der Fourierreihe an und bestimmen Sie jeweils die Intervalle auf denen die Fourierreihe gleichmässig konvergiert.

8.4. **(a)** Zeigen Sie, dass

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$$

für $n \in \mathbb{N}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0,\pi])$ ist.
Hinweis: Setzen Sie $f \in L^2([0,\pi])$ punktsymmetrisch auf $[-\pi,\pi]$ fort, verwenden dann die Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Reihe) im $L^2([-\pi,\pi])$.

(b) Stellen Sie die konstante Funktion $f(x) = 1$ als Reihendarstellung der e_n dar.

8.5. **(a)** Es sei $f \in C^2([-\pi,\pi] \to \mathbb{R})$ mir $f(x) = f'(x) = 0$ für $x = \pm\pi$. Beweisen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten gilt $a_j = O(j^{-2})$ und $b_j = O(j^{-2})$ für $j \to \infty$.

(b) Verallgemeinern Sie dieses Resultat: Welche Voraussetzungen an f werden benötigt, damit $a_j, b_j = O(j^{-k})$ für $j \to \infty$ und $k \in \mathbb{N}$?

(c) Geben Sie Voraussetzungen an die Koeffizienten a_j, b_j an, so dass gilt

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^l}{dx^l}\left((a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

für $l = 1, 2$.

Zusatzaufgaben

8.6. Sei $(H, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm und sei $M \subset H$ eine abgeschlosssene konvexe[1] Menge.

(a) Beweisen Sie die Parallelogramm-Gleichung:
Für alle $x, y \in H$ gilt $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) Sei $x \in H$. Zeigen Sie, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \inf\{\|x - y\| \,:\, y \in M\}$$

eine Cauchy-Folge ist.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ genau einen Vektor $x_M \in M$ gibt, so dass

$$\|x - x_M\| = \inf\{\|x - y\| \,:\, y \in M\}.$$

[1] M heißt konvex, falls $x, y \in M$ impliziert, dass $(1 - \lambda)x + \lambda y \in M$ für alle $\lambda \in [0, 1]$.