Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 9

„The deep study of nature is the most fruitful source of mathematical discoveries. By offering to research a definite end, this study has the advantage of excluding vague questions and useless calculations; besides it is a sure means of forming analysis itself and of discovering the elements which it most concerns us to know, and which natural science ought always to conserve.“
(Joseph Fourier ; 1768-1830)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

9.1. (4 Punkte) Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des Problems

$$y'''(x) + ay''(x) + y(x) = \sin(3x), \quad y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi), y''(-\pi) = y''(\pi)$$

mit Hilfe des Fourieransatzes

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Geben Sie die Lösung in reeller Form an.

9.2. (4 Punkte) Sei $f \in L^2([-\pi, \pi])$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \left| \int_{]-\pi, \pi[} f(x) e^{-inx} dx \right|^2 < \infty.$$

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung, dass die komplexe Fourierreihe von f absolut konvergiert.
- (b) Zeigen Sie, dass die komplexe Fourierreihe von f gleichmäßig fast überall gegen f konvergiert.

Votieraufgaben

9.3. (a) Beweisen Sie die folgenden elementaren Rechenregeln für die Fouriertransformation. Seien dazu $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig.

i) Für $h \in \mathbb{R}$ bezeichne $f_h(x) := f(x - h)$. Dann gilt $\hat{f}_h(\xi) = e^{-i\xi h} \hat{f}(\xi)$.

ii) Für $\alpha > 0$ bezeichne $f^\alpha(x) := f(x\alpha)$. Dann gilt $\hat{f}^\alpha(\xi) = \alpha^{-1} \hat{f}(\xi/\alpha)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) für $\alpha > 0$ die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) := e^{-\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9.4. Es sei $\lambda > 0$.

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $\chi_{[-\lambda, \lambda]}$.

(b) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin(\lambda t)}{t} e^{itx} dt.$$

9.5. Sei $u \in S(\mathbb{R})$ und $a > 0$. Gegeben sind folgende Aussagen:

(a) $\text{supp}(u) \subset [-a, a]$

(b) Die Fouriertransformierte $\hat{u}$ lässt sich zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ existiert $c_m > 0$ mit

$$|\hat{u}(z)| \leq c_m (1 + |z|)^{-m} e^{a|\text{Im}(z)|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beweisen Sie (a) $\Rightarrow$ (b).

Zusatzaufgaben

9.6. Beweisen Sie in der Aufgabe 9.6, dass (b) $\Rightarrow$ (a).