Höhere Analysis (SS 2013)

Metrische Räume

Definition (Metrik): Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt *Metrik* oder *Abstandsfunktion*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) (Symmetrie) $\forall x, y \in X : \; d(x, y) = d(y, x)$.

(b) (Dreiecksungleichung) $\forall x, y, z \in X : \; d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

(c) (Definitheit) $\forall x, y \in X : \; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Das Paar (X, d) wird dann als *metrischer Raum* bezeichnet.

Beispiele:

(a) Auf $\mathbb{R}$ wird durch $d(x, y) := |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ eine Metrik definiert.

(b) Allgemeiner: Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$ eine Metrik auf X definiert.

(c) (Französische Eisenbahnmetrik) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $p \in X$. Dann wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|, & \text{falls } x, y \text{ und } p \text{ auf einer Geraden liegen;} \\ \|x - p\| + \|y - p\|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik definiert.

Ursprung: Das französische Eisenbahnnetz war früher so beschaffen, dass die schnellste (oder auch die einzige) Bahnverbindung zwischen 2 Städten immer über Paris verlief.

(d) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann wird durch

$$d_A(x, y) := d(x, y), \quad x, y \in A,$$

eine Metrik auf A definiert.

Im Folgenden sei (X, d) immer ein metrischer Raum.

Definition (Konvergenz): Sei (x_n) eine Folge in (X, d) und $x \in X$. Dann heißt (x_n)

(a) *konvergent gegen x* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; d(x_n, x) < \varepsilon$;

(b) *Cauchy-Folge* $\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bemerkung: Aus der Δ-Ungleichung folgt, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist.

Definition (Topologie):

(a) Seien $x_0 \in X$ und $r > 0$. Dann nennen wir $K_r(x_0) := \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\}$ die *offene Kugel* um x_0 mit Radius r.

(b) $O \subseteq X$ heißt *offen* $:\Longleftrightarrow \forall x \in X\ \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

(c) $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow X \backslash A$ offen.

Bemerkungen:

(a) $\emptyset$ und X sind immer sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, falls für alle (in X) konvergente Folgen (x_n) der Grenzwert wieder in A enthalten ist.

(c) Wir betrachten $X := \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik und $A := [0, 1)$. Dann ist A weder offen noch abgeschlossen in (X, d), aber sowohl offen als auch abgeschlossen in (A, d_A).

(d) Es sei $D \subseteq X$. Wir definieren

- das *Innere von D*,
$$\mathring{D} := \bigcup_{O \subseteq D,\ O \text{ offen}} O;$$
- den *Abschluss von B*,
$$\bar{D} := \bigcap_{D \subseteq A,\ A \text{ abgeschl.}} A;$$
- den *Rand von B*,
$$\partial D := \bar{D} \backslash \mathring{D}.$$

Definition (Stetigkeit): Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ und $x_0 \in X$. f heißt *stetig in x_0*, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta :\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

f heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt stetig ist.

Satz: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

(a) f stetig.

(b) Für alle konvergenten Folgen (x_n) ist auch die Folge $(f(x_n))$ konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

(c) Für alle offenen Mengen $U \subseteq Y$ ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ wieder offen.