PD. Dr. P.H. Lesky Universität Stuttgart
Sommersemester 2016

Höhere Analysis

Teil I: Einführung in Maß- und Integrationstheorie

1 Mengen messen

1.1 Falsche Erwartungen

Für Quader im $\mathbb{R}^n$: $Q = \bigtimes_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \;\Rightarrow\;$ Volumen$(Q) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$

Fortsetzung des Volumenbegriffs auf beliebige Mengen $M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$?

1.1 Erster Versuch: Eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt**, falls

(I1) $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(I2) $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Bewegung $\;\Rightarrow\;$ $\mu\big(\beta(A)\big) = \mu(A)$,

(I3) $\mu\big(\,]0, 1]^n\big) = 1$.

μ heißt **Maß**, falls anstelle von (I1) gilt:

(I4) $\mu\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

1.2 Gegenbeispiel *(Vitali 1905):* Es gibt kein Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$.

Beweis: Annahme: $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ist ein Maß. Zerlege $]0, 1]$ in abzählbar viele gleich große disjunkte Mengen:

Auf $]0, 1]$ definiere Äquivalenzrelation: $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}$.

Definiere A_0 durch: $A_0 \subseteq]0, 1]$ und A_0 enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element (Auswahlaxiom).

Sei $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap]0, 1]$ und

$$A_j \;:=\; q_j + A_0 \text{ mod } 1 \;:=\; \{a + q_j + \underbrace{(-1)}_{\text{falls } a+q_j>1} : a \in A_0\} \;\subseteq\;]0, 1].$$

Dann gelten:

1) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \;=\;]0,1]$:

$\subseteq$: Nach Definition.

$\supseteq$: Sei $x \in \,]0,1] \;\Rightarrow\; \exists y \in A_0 : x \in [y]_\sim \;\Rightarrow\; x - y \in \mathbb{Q} \cap \,]-1,1[$.

Falls $x = y$: $\exists j \in \mathbb{N} : q_j = 1 \;\Rightarrow\; x = y \in A_0 = A_0 + 1$ mod $1 = A_j$

Falls $x - y \in \mathbb{Q} \cap \,]0,1[: \exists j \in \mathbb{Q} : x - y = q_j$ bzw. $x = y + q_j$

$\Rightarrow\; x \in A_0 + q_j$ mod 1

Falls $x - y \in \mathbb{Q} \cap \,]-1,0[: \exists j \in \mathbb{Q} : x - y = q_j - 1$ bzw. $x = y + q_j - 1$

$\Rightarrow\; x \in A_0 + q_j$ mod 1

2) $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$:

Sei $x \in A_j \cap A_k :\;\; x = y_1 + q_j$ mod 1, $\; y_1 \in A_0$

$x = y_2 + q_k$ mod 1, $\; y_2 \in A_0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}, \text{ also } [y_1]_\sim = [y_2]_\sim \\ &\overset{\text{Def } A_0}{\Rightarrow} && y_1 = y_2, \text{ also } q_j = q_k \text{ mod 1} \\ &\Rightarrow && q_j = q_k, \text{ also } A_j = A_k. \end{aligned}$$

3) $\mu(A_j) = \mu(A_0)$:

$$A_j = \big((A_0 + q_j) \cap \,]0,1]\big) \,\dot\cup\, \big((A_0 + q_j) \cap \,]1,2] \underbrace{-1}_{\text{Translation} \Rightarrow \text{Bewegung}}\big)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \;\; \mu(A_j) &\overset{\text{(I4), (I2)}}{=} \mu\big((A_0 + q_j) \cap \,]0,1]\big) + \mu\big((A_0 + q_j) \cap \,]1,2]\big) \\ &= \mu\big(((A_0 + q_j) \cap \,]0,1]) \,\dot\cup\, ((A_0 + q_j) \cap \,]1,2])\big) \\ &= \mu(A_0 + q_j) \\ &\overset{\text{(I2)}}{=} \mu(A_0) \end{aligned}$$

$$1)-3) \;\Rightarrow\; 1 \overset{\text{(I3)}}{=} \mu(\,]0,1]) \overset{\text{(I4)}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_0) \;=\; \infty \text{ oder } 0 \quad \lightning$$

$\square$

1.3 Bemerkungen: **1)** Hausdorff 1914: Auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ gibt es keinen Inhalt.

2) Banach-Tarski (1924): Sei $n \geq 3$. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$, $C_1, \ldots, C_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und Bewegungen $\beta_1, \ldots, \beta_k$, so dass

$$B_1(0) = \dot{\bigcup_{j=1,\ldots,k}} C_j \text{ und } \dot{\bigcup_{j=1,\ldots,k}} \beta_j(C_j) = B_1(0) \cup B_1(3).$$

3) Banach 1923: Sowohl auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$ als auch auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ existieren verschiedene Inhalte.

1.2 Messbare Mengen

1.4 Definition: Sei Ω eine Menge.

1) $h \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Halbring**, falls

(h1) $\emptyset \in h$,

(h2) $A, B \in h \;\Rightarrow\; A \cap B \in h$

(h3) $A, B \in h \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}\, \exists C_1, \dots, C_k \in h : B \setminus A = C_1 \,\dot\cup\, C_2 \dots \dot\cup\, C_k$.

2) $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-Algebra**, falls

(S1) $\emptyset \in \Sigma$,

(S2) $A_j \in \Sigma$ für $j \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \Sigma$.

(S3) $A \in \Sigma \;\Rightarrow\; A^c \in \Sigma$

(Ω, Σ) heißt **messbarer Raum**, $\Sigma =$ **Menge der messbaren Mengen**.

3) Zu $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \sigma(M) \;&:=\; \text{„kleinste“ } \sigma\text{-Algebra, die } M \text{ enthält} \\ &:=\; \bigcap_{\Sigma \in \{\Sigma : \Sigma \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \,\wedge\, M \subseteq \Sigma\}} \Sigma \end{aligned}$$

(Schnitte von σ-Algebren sind σ-Algebren) und heißt die **von M erzeugte** σ-Algebra.

4) Sei X Menge, $\mathcal{O}_X$ die Menge aller offenen Teilmengen von X (d.h. $\mathcal{O}_X$ ist Topologie auf X). Dann heißt $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}_X)$ **Borel-σ-Algebra** auf X.

1.5 Folgerungen: **1)** $A_j \in \Sigma$ für $j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \;=\; \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (A_j^c)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^c \right)^c \;\in\; \Sigma.$$

2) Ist $\mathcal{A}_X := \{O^c : O \in \mathcal{O}_X\}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X, so gilt $\sigma(\mathcal{A}_X) = \sigma(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X \subseteq \sigma(\mathcal{O}_X) \;&\overset{\text{(S3)}}{\Rightarrow}\; \mathcal{A}_X \subseteq \sigma(\mathcal{O}_X) \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{A}_X) \subseteq \sigma(\mathcal{O}_X), \\ \mathcal{A}_X \subseteq \sigma(\mathcal{A}_X) \;&\overset{\text{(S3)}}{\Rightarrow}\; \mathcal{O}_X \subseteq \sigma(\mathcal{A}_X) \;\Rightarrow\; \sigma(\mathcal{O}_X) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_X). \end{aligned}$$

1.6 Wichtigstes Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_\mathbb{R} = \{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ offen}\}$. Dann enthält $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}_\mathbb{R})$

- alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$,
- alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, insbesondere Einpunktmengen,
- alle endlichen und abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

1.7 Satz: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{O \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}\big)$ wird von jeder der folgenden Mengen erzeugt:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \big\{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\big\} \\
M_2 &= \big\{\,]a,b[\, : a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
M_3 &= \big\{\,]a,b] : a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
M_4 &= \big\{[a,b[\, : a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
M_5 &= \big\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\big\} \\
M_6 &= \big\{[a,\infty[\, : a \in \mathbb{R}\big\} \\
M_7 &= \big\{\,]a,\infty[\, : a \in \mathbb{R}\big\} \\
M_8 &= \big\{\,]-\infty,a[\, : a \in \mathbb{R}\big\} \\
M_9 &= \big\{\,]-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\big\} \\
M_{10} &= \big\{\,]a,b[\, : a,b \in \mathbb{Q}\big\}
\end{aligned}$$

Entsprechend für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird erzeugt von

$$h = \left\{ \bigtimes_{j=1}^{n}\,]a_j,b_j] : a_j,b_j \in \mathbb{R} \right\},$$

und h ist ein Halbring.

Beweis zu M_3: **1)** $]a,b] = \underbrace{]a,\infty[}_{\in \mathcal{O}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cap \underbrace{]b,\infty[^c}_{\in \mathcal{A}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow M_3 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \sigma(M_3) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) $O \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow$ O ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle (Ü): $O = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]a_j,b_j[$

$$]a_j,b_j[\, = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big]\, a_j, b_j - \frac{1}{k}\Big] \in \sigma(M_3)$$
$\Rightarrow \mathcal{O}_\mathbb{R} \subseteq \sigma(M_3) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}_\mathbb{R}) \subseteq \sigma(M_3)$. □

1.8 Satz: Sei $M \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $f : \Omega' \to \Omega$. Dann ist

$$f^{-1}\big(\sigma(M)\big) = \big\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(M)\big\}$$

eine σ-Algebra und wird von $f^{-1}(M)$ erzeugt: $\sigma\big(f^{-1}(M)\big) = f^{-1}\big(\sigma(M)\big)$.

Beweis: **1)** Es gelten (Übungen):

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_j) \\ f^{-1}(A^c) &= \big(f^{-1}(A)\big)^c \end{aligned}$$

2) $\sigma(M)$ σ-Algebra $\overset{1)}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(\sigma(M))$ ist σ-Algebra auf Ω'

3) $M \subseteq \sigma(M) \;\Rightarrow\; f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}\big(\sigma(M)\big)$ σ-Algebra $\Rightarrow\; \sigma\big(f^{-1}(M)\big) \subseteq f^{-1}\big(\sigma(M)\big)$.

Betrachte $\Sigma := \big\{A \subseteq \Omega : f^{-1}(A) \in \sigma\big(f^{-1}(M)\big)\big\} \overset{1)}{\Rightarrow} \Sigma$ ist σ-Algebra auf Ω.

$M \subseteq \Sigma \;\Rightarrow\; \sigma(M) \subseteq \Sigma \;\Rightarrow\; f^{-1}\big(\sigma(M)\big) \subseteq f^{-1}(\Sigma) \overset{\text{Def }\Sigma}{=} \sigma\big(f^{-1}(M)\big)$

Also $\sigma\big(f^{-1}(M)\big) = f^{-1}\big(\sigma(M)\big)$. □

1.3 Maße

Im Folgenden: h Halbring, Σ σ-Algebra.

1.9 Definition: $\mu : h \to [0,\infty]$ heißt **Prämaß**, $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ heißt **Maß**, falls

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(M2) $\forall A \in h/\Sigma : \mu(A) \geq 0$,

(M3) $\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ (**σ-Additivität**) [bei Prämaß: falls $\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j \in h$]

(Ω, Σ, μ) heißt **Maßraum**. Falls $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) < \infty$, heißt μ **σ-endlich**.

Falls $\mu(\Omega) < \infty$: **endliches Maß**, falls $\mu(\Omega) = 1$: **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

1.10 Fortsetzungssatz: Ein Prämaß μ_0 auf h besitzt eine Fortsetzung zu einem Maß μ auf $\Sigma := \sigma(h)$. Falls μ_0 σ-endlich, ist die Fortsetzung eindeutig.

Beweis: Siehe Elstrodt, Kapitel II, §§ 4,5. □

1.11 Folgerung: Es gibt genau ein Maß $\mu^{(n)}$ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mu^{(n)}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \,]a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \quad \text{für } a_j \leq b_j. \qquad (*)$$

$\mu^{(n)}$ heißt **Lebesgue-Borel-Maß** und ist translationsinvariant.

Beweisskizze: Durch $(*)$ wird auf $h = \left\{ \bigtimes_{j=1}^{n}]a_j, b_j] \right\}$ ein Prämaß μ induziert. Es ist σ-endlich, da

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}}]-j, j]^n, \quad \mu(\,]-j,j]^n) = (2j)^n < \infty.$$

Also ist die Fortsetzung auf $\sigma(h) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eindeutig.
Da das Prämaß translationsinvariant ist, gilt dies auch für die Fortsetzung. $\square$

***1.12 Weitere Eigenschaften**:* Sei μ ein Maß. Für $A_j \in \Sigma$ gelten:

1) $A_1 \subseteq A_2 \;\Rightarrow\; \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (**Monotonie**):
$A_2 = A_1 \,\dot\cup\, (A_2 \cap A_1^c) \overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} \mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(\ldots) \overset{\text{(M2)}}{\geq} \mu(A_1)$.

2) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \;\wedge\; A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \;\Rightarrow\; A \in \Sigma \;\wedge\; \mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$:
$A \in \Sigma$ nach (S2).
$A = A_1 \,\dot\cup\, (A_2 \cap A_1^c) \,\dot\cup\, (A_3 \cap A_2^c) \,\dot\cup\, \ldots$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{(M3)}}{\Rightarrow} \mu(A) \quad &= \quad \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \cap A_{j-1}^c) \\
&= \quad \lim_{k \to \infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{j=2}^{k} \mu(A_j \cap A_{j-1}^c) \right) \\
&\overset{\text{(M3)}}{=} \quad \lim_{k \to \infty} \mu\big(\underbrace{A_1 \,\dot\cup\, (A_2 \cap A_1^c) \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, (A_k \cap A_{k-1}^c)}_{=A_k} \big).
\end{aligned}$$

3) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \;\wedge\; A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \;\Rightarrow\; A \in \Sigma \;\wedge\; \mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$:
$A \in \Sigma$ nach 1.5.

$$A \subseteq A_1 \;\Rightarrow\; A_1 = A \,\dot\cup\, (A_1 \setminus A) = A \,\dot\cup\, \Big(A_1 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \Big) \overset{\text{De Morgan}}{=} A \,\dot\cup\, \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_j) \Big)$$

$$\Rightarrow\; \mu(A_1) \overset{\text{(M3)}}{=} \mu(A) + \mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_j) \Big) \overset{\text{2)}}{=} \mu(A) + \lim_{j \to \infty} \underbrace{\mu(A_1 \setminus A_j)}_{=\mu(A_1) - \mu(A_j) \text{ (Übung)}}$$

$$\Rightarrow\; \mu(A_1) \;=\; \mu(A) + \mu(A_1) - \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

4) $\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ (Übung)

***1.13 Definition**:* Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum.

1) $N \in \Sigma$ heißt **Nullmenge**, falls $\mu(N) = 0$.

2) Eine Aussageform $E(x)$ $(x \in \Omega)$ gilt ***μ*-fast überall**, falls es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in \Omega \setminus N : E(x)$.

3) (Ω, Σ, μ) heißt **vollständiger Maßraum**, falls gilt:

$$\mu(N) = 0 \ \wedge \ A \subseteq N \ \Rightarrow \ A \in \Sigma.$$

D.h.: Jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder eine Nullmenge.

1.14 Vervollständigung: Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum und

$$\begin{aligned} \Sigma^* &:= \{B \subseteq \Omega \mid \exists A, C \in \Sigma : A \subseteq B \subseteq C \ \wedge \ \mu(C \setminus A) = 0\}, \\ \mu^*(B) &:= \mu(A) \quad (= \mu(C)). \end{aligned}$$

Dann ist

- Σ^* eine σ-Algebra auf Ω,
- μ^* Maß auf Σ^*,
- μ^* die eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf Σ^*,
- $(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$ vollständig.

Beweis: **1)** Σ^* ist σ-Algebra:

(S1) $\emptyset \in \Sigma^*$ klar.

(S2) $B_j \in \Sigma^* \ \wedge \ A_j \subseteq B_j \subseteq C_j \ \wedge \ \mu(C_j \setminus A_j) = 0$

$$\Rightarrow \ A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \ \subseteq \ B := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \ \subseteq \ C := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad C \setminus A \ &= \ \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j\right) \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c \ = \ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(C_j \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) \\ &\subseteq \ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(C_j \cap A_j^c\right) \ = \ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (C_j \setminus A_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \mu(C \setminus A) \ \overset{\text{1.12, 4)}}{\leq} \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j \setminus A_j) \ = \ 0$$

$$\Rightarrow \ B \in \Sigma^*.$$

(S3) $B \in \Sigma^* \ \wedge \ A \subseteq B \subseteq C \ \wedge \ \mu(C \setminus A) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} C^c \subseteq B^c \subseteq A^c \\ \mu(\underbrace{A^c \setminus C^c}_{=A^c \cap (C^c)^c = A^c \cap C}) = \mu(C \setminus A) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ B^c \in \Sigma^*.$$

2) μ^* ist Maß: Übung

3) Eindeutigkeit: Sei $A \subseteq B \subseteq C$ mit $\mu(C \setminus A) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu(C) &= \mu(A \dot\cup C \setminus A) = \mu(A) + \mu(C \setminus A) = \mu(A) \\ \mu(A) &= \mu^*(A) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \mu^*(B) \leq \mu^*(C) = \mu(C) \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu^*(B) = \mu(A)$ eindeutig.

4) Vollständigkeit klar. □

1.15 Definition: Die eindeutige Vervollständigung des Maßraumes $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu^{(n)}\right)$ wird mit $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda^{(n)}\right)$ bezeichnet. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt σ-Algebra der **Lebesgue-messbaren Mengen**, $\lambda^{(n)}$ heißt **Lebesgue-Maß**.

1.16 Beispiele: **1)** $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda^{(n)}(\{x\}) = 0$.

2) Aus 1) folgt: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar $\Rightarrow \lambda^{(n)}(M) = 0$.

3) Sei $n \geq 2,\ a \in \mathbb{R},\ H := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = a\}$ (Hyperebene). Dann $\lambda^{(n)}(H) = 0$.

1.17 Satz: Zu jedem $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und jedem $\varepsilon > 0$ existieren $U \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit

$$U \subseteq A \subseteq O \ \wedge\ \lambda^{(n)}(A \setminus U) < \varepsilon \ \wedge\ \lambda^{(n)}(O \setminus A) < \varepsilon.$$

Beweis: Siehe Elstrodt, Kapitel II, Satz 7.1. □

2 Funktionen integrieren

2.1 Messbare Funktionen

***2.1 Definition**:* $(\Omega, \Sigma),\ (\Omega', \Sigma')$ messbare Räume; $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar**, falls

$$\forall B \in \Sigma' : f^{-1}(B) \in \Sigma$$

oder anders geschrieben: $f^{-1}(\Sigma') \subseteq \Sigma$.

Schreibe $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ messbar.
Falls $\Sigma' = \mathcal{B}(\Omega') =$ Borel-σ-Algebra: f heißt **Borel-messbar**.

***2.2 Vereinfachung**:* Ist $M' \subseteq \Sigma'$ mit $\Sigma' = \sigma(M')$, dann sind äquivalent:

(i) $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ messbar,

(ii) $\forall B \in M' : f^{-1}(B) \in \Sigma$ (oder $f^{-1}(M') \subseteq \Sigma$).

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $M' \subseteq \Sigma' \ \Rightarrow\ f^{-1}(M') \subseteq f^{-1}(\Sigma') \overset{\text{(i)}}{\subseteq} \Sigma$

(ii) $\Rightarrow$ (i):
$$\begin{aligned} f^{-1}(\Sigma') &= f^{-1}\big(\sigma(M')\big) \\ &\overset{1.8}{=} \sigma\big(f^{-1}(M')\big) && \text{(kleinste } \sigma\text{-Algebra, die } f^{-1}(M') \text{ enthält)} \\ &\overset{\text{(ii)}}{\subseteq} \Sigma && \text{da } f^{-1}(M') \subseteq \Sigma \text{ und } \Sigma\ \sigma\text{-Algebra} \end{aligned}$$
□

***2.3 Folgerungen**:* **1)** $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow$ f Borel-meßbar.

2) Sei (Ω, Σ) messbarer Raum. Für $A \subseteq \Omega$ ist

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** von A. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in \Sigma$,

(ii) $\chi_A : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

Beweis: **1)** Borel-σ-Algebra auf X: $\Sigma = \sigma(\mathcal{O}_X)$
Borel-σ-Algebra auf Y: $\Sigma' = \sigma(\mathcal{O}_Y)$

f stetig $\Rightarrow$ $f^{-1}(O)$ offen in X für $O \in \mathcal{O}_Y$.
$\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq \Sigma$
$\overset{2.2}{\Rightarrow}$ f messbar.

2) Beachte: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{\,]a,b]\}\big)$.

(i)⇒(ii): $$\chi_A^{-1}(\,]a,b]) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} \Omega & \text{falls } 0 \in\,]a,b] \;\wedge\; 1 \in\,]a,b], \\ \Omega \setminus A & \text{falls } 0 \in\,]a,b] \;\wedge\; 1 \notin\,]a,b], \\ A & \text{falls } 0 \notin\,]a,b] \;\wedge\; 1 \in\,]a,b], \\ \emptyset & \text{falls } 0 \notin\,]a,b] \;\wedge\; 1 \notin\,]a,b] \end{array}\right\} \in \Sigma.$$

(ii)⇒(i): $A = \chi^{-1}(\,]\tfrac{1}{2}, 1]) \in \Sigma$.

□

2.4 Erweiterung von $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \;:=\; \big\{B \cup E : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;\wedge\; E \in \{\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}\}\big\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ eine σ-Algebra, die Borel-σ-Algebra von $\overline{\mathbb{R}}$; $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

2.5 Folgerung: $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar $\Leftrightarrow\;\; \forall a \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(\,]a, \infty]) \in \Sigma$

$\Leftrightarrow\;\; \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(\,]a, b]) \in \Sigma$

$\vdots$

Beweis: $\sigma\big(\{\,]a,\infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}\big) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

□

2.6 Bildmaß: Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ messbar, μ Maß auf (Ω, Σ). Dann ist $\nu : \Sigma' \to [0, \infty]$ mit

$$\nu(B) \;:=\; \mu\big(f^{-1}(B)\big) \quad \text{für } B \in \Sigma'$$

ein Maß auf (Ω', Σ'), das **Bildmaß**. Schreibe $\nu =: f(\mu)$.

Beweis: (M1), (M2) klar.

(M3): $$\nu\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} B_j\Big) \;=\; \mu\Big(f^{-1}\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} B_j\Big)\Big) \;=\; \mu\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} f^{-1}(B_j)\Big)$$
$$\underset{\text{für } \mu}{\overset{\text{(M3)}}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big(f^{-1}(B_j)\big) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j).$$

□

2.7 Satz: $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$ messbar und $g : (\Omega', \Sigma') \to (\Omega'', \Sigma'')$ messbar. Dann ist $g \circ f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega'', \Sigma'')$ messbar.

Beweis: Sei $C \in \Sigma'' \;\Rightarrow\; g^{-1}(C) \in \Sigma' \;\Rightarrow\; (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \Sigma$.

□

2.8 Satz: **1)** Für $f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ sind äquivalent:

(i) f ist Borel-messbar.

(ii) $f_1, \dots, f_n : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ sind Borel-messbar.

2) $f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{C}$ Borel-messbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : (\Omega, \sigma) \to \mathbb{R}$ Borel-messbar.

Beweis: **1)** Es gilt $f^{-1}\Big(\bigtimes_{j=1}^{n} \,]a_j, b_j]\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(\,]a_j, b_j])$.

Damit (ii) $\Rightarrow$ (i) klar.

Für (i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle für $j \leq n-1$ anstelle von $]a_j, b_j]$ die Menge $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $f^{-1}(\,]a_n, b_n]) = f^{-1}\Big(\Big(\bigtimes_{j=1}^{n-1} \mathbb{R}\Big) \times \,]a_n, b_n]\Big) \overset{\text{(i)}}{\in} \Sigma$.

2) Folgt aus 1), da $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ topologisch isomorph sind. $\square$

2.9 Satz: **1)** Seien $f, g : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar. Dann sind auch Borel-messbar:

$\lambda \cdot f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \cdot \infty := 0$

$f + g$ falls $\forall x \in \Omega : \big(f(x) = \pm\infty \Rightarrow g(x) \neq -f(x)\big)$

$f \cdot g$

$\dfrac{1}{f}$ mit $\dfrac{1}{\infty} := 0,\ \dfrac{1}{0} := \infty$

$\max\{f, g\},\ \min\{f, g\}$

$f_+ := \max\{f, 0\},\ f_- := \max\{-f, 0\}$

$|f| = f_+ + f_-$

2) Seien $f_j : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar. Dann sind auch Borel-messbar:

$\sup f_j : x \mapsto \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} f_j(x),\ \inf f_j,\ \limsup\limits_{j \to \infty} f_j,\ \liminf\limits_{j \to \infty} f_j$ und $\lim\limits_{j \to \infty} f_j$ falls existent.

Beweis: **1)** $f + g$: $\Phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$

$\mathrm{Plus} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto y_1 + y_2$ stetig, also Borel-messbar

$$\Rightarrow\ (f+g)^{-1}(\underbrace{]a, \infty]}_{\text{erzeugt } \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})}) = \underbrace{(f+g)^{-1}(\,]a, \infty[\,)}_{=(\mathrm{Plus} \circ \Phi)^{-1}(\,]a,\infty[\,) \in \Sigma} \cup \underbrace{(f+g)^{-1}(\{\infty\})}_{=f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma} \in \Sigma$$

$\overset{2.2}{\Rightarrow}$ $f + g$ messbar.

$f \cdot g$ entsprechend.

Für $\dfrac{1}{f}$: Im Fall $a>0$: $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{-1}(]a,\infty]=f^{-1}(]0,\frac{1}{a}[)\cup f^{-1}(\{0\})\in\Sigma$

Im Fall $a=0$: $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{-1}(]a,\infty]=f^{-1}(]0,\infty[)\cup f^{-1}(\{0,\infty\})\in\Sigma$

Im Fall $a<0$: $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{-1}(]a,\infty]=f^{-1}(]0,\infty[)\cup f^{-1}(\{0,\infty\})\cup f^{-1}(]\frac{1}{a},0[)\in\Sigma$

$\max\{f,g\}$: $\big(\max\{f,g\}\big)^{-1}(\,]a,\infty])\;=\;f^{-1}(\,]a,\infty])\cup g^{-1}(\,]a,\infty])\;\in\;\Sigma$.

2) Setze $\overline{f}:=\sup f_j$, d.h. $\overline{f}(x)=\sup\{f_j(x):j\in\mathbb{N}\}$ für $x\in\Omega$

$\Rightarrow\;\;(\overline{f})^{-1}(\,]a,\infty])\;=\;\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}f_j^{-1}(\,]a,\infty])\;\in\;\Sigma$

$\Rightarrow\;\;\sup f_j$ ist messbar.

$\inf f_j\;=\;-\sup(-f_j)$ ist messbar.

$x\mapsto\limsup\limits_{j\to\infty}f_j(x)\;=\;\inf\limits_{j\geq 1}\sup\limits_{k\geq j}f_k(x)$ ist messbar.

Falls $\limsup\limits_{j\to\infty}f_j=\liminf\limits_{j\to\infty}f_j\;\Rightarrow\;\lim\limits_{j\to\infty}f_j=\limsup\limits_{j\to\infty}f_j$ ist messbar.

$\square$

2.2 Das Lebesgue-Integral

2.10 Definition: $f:(\Omega,\Sigma)\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **einfache Funktion**, falls f Borel-messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. D.h.

f ist einfach $\;\Leftrightarrow\;$ f ist endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen messbarer Mengen

2.11 Vorläufige Definition: (Ω,Σ,μ) Maßraum, $E\in\Sigma,\;f=\sum\limits_{j=1}^{k}c_j\chi_{A_j}$ mit $c_j\geq 0$. Dann

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu\;:=\;\sum_{j=1}c_j\mu(A_j\cap E).$$

mit $0\cdot\infty:=0$ falls $c_j=0\;\wedge\;\mu(A_j\cap E)=\infty$. Insbesondere: $\displaystyle\int_E 1\,\mathrm{d}\mu=\mu(E)$.

2.12 Beispiele: **1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$\Rightarrow\;\;f=1\cdot\chi_{[0,2]}\,\big(+0\cdot\chi_{\mathbb{R}\setminus[0,2]}\big)$

$\Rightarrow\;\;\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}\;=\;1\cdot 2\,\big(+0\cdot\infty\big)\;=\;2.$

2) $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 1 \cdot \lambda^{(1)}\big([0, \infty[\big) = \infty.$

3) $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = 1 \cdot \chi_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} h \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 1 \cdot \lambda^{(1)}(\mathbb{Q}) = 0$ (vgl. 1.16).

2.13 Satz *(zentral):* Sei $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar und positiv ($f(x) \geq 0$ für $x \in \Omega$). Dann existiert eine Folge (s_j) einfacher Funktionen mit

1) $0 \leq s_(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \leq f(x)$ für $x \in \Omega$ und

2) $\forall x \in \Omega : \lim\limits_{j \to \infty} s_j(x) = f(x)$.

Ist f beschränkt, so konvergiert (s_j) gegen f gleichmäßig auf Ω.

Beweis: Für $j \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned} E_{j,k} &:= \Big\{x \in \Omega : \frac{k-1}{2^j} \leq f(x) < \frac{k}{2^j}\Big\} = f^{-1}\Big(\Big[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\Big[\Big) \in \Sigma, \ 1 \leq k \leq j\,2^j, \\ F_j &:= \{x \in \Omega : f(x) \geq j\} = f^{-1}\big([j, \infty]\big) \in \Sigma, \\ s_j &:= \sum_{k=1}^{j\,2^j} \frac{k-1}{2^j} \cdot \chi_{E_{j,k}} + j \cdot \chi_{F_j}. \end{aligned}$$

s_j ist einfache Funktion, $0 \leq s_j(x) \leq f(x)$ nach Konstruktion.
(s_j) ist monoton wachsend, denn

$$E_{j,k} = E_{j+1,2k-1} \,\dot{\cup}\, E_{j+1,2k}, \ s_{j+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2k-2}{2^{j+1}} = s_j(x) & x \in E_{j+1,2k-1} \\ \dfrac{2k-1}{2^{j+1}} \geq \dfrac{2k-2}{2^{j+1}} = s_j(x) & x \in E_{j+1,2k} \end{cases}$$

Enstprechend auf F_j. Für festes $x \in \Omega$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} \text{Falls } f(x) < \infty\text{:} \ \big|s_j(x) - f(x)\big| < \dfrac{1}{2^j} \text{ für } j > f(x) \\ \text{Falls } f(x) = \infty\text{:} \ s_j(x) = j \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{j \to \infty} s_j(x) = f(x).$$

f beschränkt $\Rightarrow$ Für $j > \sup f(x)$ gilt $F_j = \emptyset$, also $\big|s_j(x) - f(x)\big| < \frac{1}{2^j}$ für alle $x \in \Omega$. □

2.14 Folgerung*:* Sei $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent

(i) f ist Borel-messbar,

(ii) f ist punktweise Grenzwert einfacher Funktionen.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): f Borel-messbar $\overset{2.9}{\Rightarrow}$ f_+, f_- Borel-messbar und positiv

$\Rightarrow$ $f = f_+ - f_-$ ist punktweise Grenzwert einfacher Funktionen.

(ii) $\Rightarrow$ (i): (ii) $\overset{2.9}{\Rightarrow}$ $f = \lim\limits_{j\to\infty} s_j$ ist Borel-messbar. $\square$

***2.15 Definition**:* Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum, $E \in \Sigma$, $f : (\Omega, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar. Das **Integral von f über E** ist definiert durch

1) Falls f positiv:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \sup\Big\{ \int_E s \,\mathrm{d}\mu : s \text{ einfach } \wedge\ 0 \le s \le f \Big\}.$$

2) Mit $f = f_+ - f_-$: Falls $\displaystyle\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \infty$: $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ nicht definiert,

Andernfalls: $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu$.

3) f heißt **Lebesgue-integrierbar**, falls

$$\int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu \neq \infty \ \wedge\ \int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu \neq \infty.$$

Schreibe $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

***2.16 Eigenschaften**:* (Ω, Σ, μ) Maßraum, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar, $E, E' \in \Sigma$. Dann gelten:

1) $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \Leftrightarrow\ |f| \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.
In diesem Fall: $\displaystyle\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \ \le\ \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$.

2) $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lambda \cdot f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \wedge\ \displaystyle\int_E \lambda \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

3) $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \wedge\ |g| \le f \ \Rightarrow\ g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \wedge\ \displaystyle\left|\int_E g \,\mathrm{d}\mu\right| \ \le\ \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

4) $\mu(E) < \infty \ \wedge\ f\big|_E$ beschränkt $\Rightarrow\ \chi_E \cdot f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$

5) $f, g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \wedge\ f \le g \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu \le \int_E g \,\mathrm{d}\mu$.

6) $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E \cdot f \,\mathrm{d}\mu$.

7) $\mu(E) = 0 \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

8) $E \subseteq E' \ \wedge\ \mu(E' \setminus E) = 0 \ \wedge\ f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \Rightarrow\ \int_{E'} f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$

9) $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \Rightarrow\ \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) \notin \mathbb{R}\}\big) = 0.$

10) $E \subseteq E' \ \wedge\ f \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{E'} f \,\mathrm{d}\mu.$

11) $E \cap E' = \emptyset \ \wedge\ f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \ \Rightarrow\ \int_{E \dot\cup E'} f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_{E'} f \,\mathrm{d}\mu.$

Beweis: **10)**
$$\begin{aligned}\int_E f \,\mathrm{d}\mu &= \sup\Big\{ \int_E s \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq f \Big\} \\ &= \sup\Big\{ \int_{E'} s^* \,\mathrm{d}\mu : s^* = \begin{cases} s & x \in E \\ 0 & x \in \Omega \setminus E \end{cases}, 0 \leq s \leq f \Big\} \\ &\leq \int_{E'} f \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

1)
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega (f_+ + f_-) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sup\Big\{ \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq s \leq \underbrace{f_+ + f_-}_{\text{auf disjunkten Mengen } \neq 0},\ s = \sigma + \tau,\ 0 \leq \sigma \leq f_+,\ 0 \leq \tau \leq f_- \Big\} \\ &= \sup\Big\{ \int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq \sigma \leq f_+ \Big\} + \sup\Big\{ \int_\Omega \tau \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq \tau \leq f_- \Big\} \\ &= \int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_- \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Damit Äquivalenz klar. Außerdem folgt genauso

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \left| \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu \right| = \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$$

2), 3) Selber.

4) $c := \sup \big| f(x) \big|$. $c \cdot \chi_E \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$,
denn $(c \cdot \chi_E)_+ = c \cdot \chi_E,\ (c \cdot \chi_E)_- = 0$ und $\int_\Omega c \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu = c\mu(E) < \infty$.
$|\chi_E \cdot f| \leq c \cdot \chi_E \overset{\textbf{3)}}{\Rightarrow} \chi_E \cdot f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

5) $f \leq g \ \Rightarrow \begin{cases} f_+ \leq g_+ & \Rightarrow \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g_+ \,\mathrm{d}\mu \\ f_- \geq g_- & \Rightarrow \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E g_- \,\mathrm{d}\mu \end{cases}$

6) Direkt aus Definition des Integrals von einfachen Funktionen.

7) $0 \leq s \leq f \ \Rightarrow\ \int_E s \,\mathrm{d}\mu = 0.$

8) Für jede einfache Funktion gilt Gleichheit.

9) Sei $E := \{x \in \Omega : f(x) = \infty\}$. Annahme: $\mu(E) > 0$.
Für $s_j(x) := \begin{cases} j & x \in E \\ 0 & x \in \Omega \setminus E \end{cases}$ gilt $0 \le s_j \le f_+$
$\Rightarrow \int_\Omega f_+ \,\mathrm{d}\mu \ge \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_\Omega s_j \,\mathrm{d}\mu = \sup_{j \in \mathbb{N}} j \cdot \mu(E) = \infty$
$\Rightarrow f \notin L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

11) Sei $s = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$:
$$\begin{aligned} \int_E s \,\mathrm{d}\mu + \int_{E'} s \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{k} c_j \big(\mu(A_j \cap E) + \mu(A_j \cap E')\big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} c_j \mu\big(A_j \cap (E \mathbin{\dot\cup} E')\big) = \int_{E \mathbin{\dot\cup} E'} s \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$
□

2.3 Konvergenzsätze und mehr

2.17 Satz: Seien $\sigma,\ s_j$ einfache Funktionen mit $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots$ und $0 \le \sigma \le \lim_{j \to \infty} s_j$. Dann
$$\int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu \le \lim_{j \to \infty} \int_\Omega s_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: $\sigma = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{A_k}$.
Für $\beta > 1$ sei $B_j := \{x \in \Omega : \sigma(x) \le \beta s_j\}$. Dann

- $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$, besondere $B_1 \cap A_k \subseteq B_2 \cap A_k \subseteq \ldots$,
- $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \Omega$, insbesondere $A_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B_j \cap A_k)$,
- $\sigma \cdot \chi_{B_j} \le \beta s_j$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_\Omega \sigma \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=1}^{K} c_k \mu(A_k) \overset{\text{1.12, 2)}}{=} \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{K} c_k \mu(B_j \cap A_k) = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega \sigma \cdot \chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{2.16, 5)}}{\le} \lim_{j \to \infty} \int_\Omega \beta \cdot s_j \,\mathrm{d}\mu = \beta \cdot \lim_{j \to \infty} \int_\Omega s_j \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

$\beta > 1$ beliebig $\Rightarrow$ Behauptung.
□

***2.18 Satz von der monotonen Konvergenz** (B. Levi 1906):* Seien $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ messbare numerische Funktionen. Dann gilt
$$\int_\Omega \lim_{j \to \infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: **1)** $f(x) := \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ definiert und messbar (2.9).

2) $f_j \le f \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \;\Rightarrow\; \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

3) Seien s einfach, $0 \le s \le f$, $\beta > 1$, $B_j := \big\{x \in \Omega : s(x) \le \beta\, f_j(x)\big\}$. Dann

- $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$,
- $s \cdot \chi_{B_j}$ einfach $\wedge$ $s \cdot \chi_{B_j} \le \beta \cdot f_j$,
- $0 \le s \cdot \chi_{B_1} \le s \cdot \chi_{B_2} \le \ldots$,
- $s = \lim\limits_{j\to\infty} s \cdot \chi_{B_j}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \overset{2.17}{\le} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega s\cdot\chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \beta \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{\beta \text{ beliebig}}{\Rightarrow} && \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu \\
&\Rightarrow && \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sup_{0\le s\le f} \int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

2.19 Additivität: $f, g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Falls $f+g$ definiert ist, gilt $f+g \in L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ und

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } E \in \Sigma.$$

Beweis: **1)** Spezialfall $f, g \ge 0$: 2.9 $\Rightarrow$ $f+g$ messbar.
nach 2.13 existieren einfache Funktionen s_j, t_j mit

- $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots$, $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$,
- $\lim\limits_{j\to\infty} s_j(x) = f(x)$, $\lim\limits_{j\to\infty} t_j(x) = g(x)$ für $x \in \Omega$.

$\Rightarrow$ $\sigma_j := s_j + t_j$ ist einfach, $0 \le \sigma_1 \le \sigma_2 \le \ldots$, $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_j(x) = (f+g)(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu &\overset{2.18}{=} \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \sigma_j \,\mathrm{d}\mu \\
&\underset{\text{einf. Funkt}}{\overset{\text{Def. Integral}}{=}} \lim_{j\to\infty}\int_\Omega s_j\,\mathrm{d}\mu + \lim_{j\to\infty}\int_\Omega t_j\,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{2.18}{=} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E (f+g) \overset{2.16,\,6)}{=} \int_\Omega \chi_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu \;=\; \ldots \;=\; \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

2) Allgemeiner Fall: $\Omega = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_6$ mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0 \ \wedge\ g(x) \geq 0\} \ = \ f^{-1}([0,\infty]) \cap g^{-1}([0,\infty]) \text{ ist messbar,} \\ A_2 &:= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0 \ \wedge\ g(x) < 0 \ \wedge\ (f+g)(x) \geq 0\} \text{ ist messbar,} \\ A_3 &:= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0 \ \wedge\ g(x) < 0 \ \wedge\ (f+g)(x) < 0\} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Z.B. $$-\int_{A_3} g \,\mathrm{d}\mu \ = \ \int_{A_3} (-g - f + f) \,\mathrm{d}\mu \ \overset{1)}{=} \ \int_{A_3} (-f-g) \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_3} f \,\mathrm{d}\mu = -\int_{A_3} (f+g) \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_3} f \,\mathrm{d}\mu.$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g) \ = \ \sum_{j=1}^{6} \int_{A_j} (f+g) \,\mathrm{d}\mu \ = \ \ldots \ = \ \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

□

***2.20 Folgerung**:* $f_j : (\Omega, \Sigma, \mu) \to [0,\infty]$ messbar. Dann

$$\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^\infty f_j \Big) \,\mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{j=1}^\infty \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: $g_k := \sum_{j=1}^{k} f_j \ \Rightarrow \ 0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$

$$\Rightarrow \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^\infty f_j \Big) \,\mathrm{d}\mu \ = \ \int_\Omega \big(\lim_{k\to\infty} g_k \big) \,\mathrm{d}\mu \ \overset{2.18}{=} \ \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \,\mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{j=1}^\infty \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

□

***2.21 Beispiel**:* $\Omega = \mathbb{N},\ \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(E) = \sharp E.$

1) Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ ist Borel-messbar und

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{j=1}^\infty f(j).$$

2) Seien $f_j : \mathbb{N} \to [0,\infty],\ a_{jk} := f_j(k)$. Dann

$$\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{jk} \ = \ \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{jk}.$$

***2.22 Lemma von Fatou** (1906):* $f_j : (\Omega, \Sigma, \mu) \to [0,\infty]$ messbar. Dann

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu \ \leq \ \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Insbesondere: $f_j \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $f_j \geq 0$ und $\int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu \leq M < \infty$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann

$$f \ := \ \liminf_{j\to\infty} f_j \ \in \ L^1(\Omega, \Sigma, \mu), \ \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \ \leq \ M.$$

Beweis: 2.9 $\Rightarrow$ $f := \liminf\limits_{j\to\infty} f_j$ messbar. Außerdem $f \geq 0$.
Setze $g_k(x) := \inf\limits_{j\geq k} f_j(x)$ (ist messbar). Dann

- $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$,
- $g_k \to f$,
- $\displaystyle\int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq k} \int_\Omega f_j \, \mathrm{d}\mu$ da $g_k \leq f_j$ für $j \geq k$.

$$\Rightarrow \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \;=\; \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k \, \mathrm{d}\mu \overset{2.18}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int_\Omega f_j \, \mathrm{d}\mu \;=\; \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

2.23 Satz von der majorisierten Konvergenz *(Lebesgue 1910):* Seien $f_j, f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$. Außerdem gebe es ein $g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : |f_j| \leq g$. Dann:

- $f, f_j \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$,
- $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \;=\; 0$,
- $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \, \mathrm{d}\mu \;=\; \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \;=\; \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis: $|f_j| \leq g \overset{2.16,\,3)}{\Rightarrow} f_j \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$,
$f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) \;\Rightarrow\; |f| \leq g \overset{2.16,\,3)}{\Rightarrow} f_j \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Wegen $|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq 2g$ gilt $g_j := 2g - |f_j - f| \geq 0$.
Außerdem $g_j \to 2g$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_\Omega 2g \, \mathrm{d}\mu \;&=\; \int_\Omega \underbrace{\lim_{j\to\infty} g_j}_{=\liminf g_j} \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \big(2g - |f_j - f|\big) \, \mathrm{d}\mu \\
&=\; \int_\Omega 2g \, \mathrm{d}\mu + \underbrace{\liminf_{j\to\infty} \Big(- \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \Big)}_{=-\limsup \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu}
\end{aligned}$$

$$\overset{\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu < \infty}{\Rightarrow} \quad 0 \;\leq\; -\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \;=\; 0.$$

Außerdem: $\mu\big(\underbrace{\{x \in \Omega : f(x) = \infty \;\vee\; f(x) = -\infty\}}_{=:N}\big) = 0$.

$$\Big| \int_\Omega f_j \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \Big| \;=\; \Big| \int_{\Omega\setminus N} (f_j - f) \, \mathrm{d}\mu \Big| \;\leq\; \int_{\Omega\setminus N} |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_\Omega |f_j - f| \, \mathrm{d}\mu \;\to\; 0. \qquad \square$$

2.24 Tschebyscheff-Ungleichung: Für $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu),\ f \geq 0,\ c \in]0, \infty]$ gilt

$$\mu\big(\{x \in \Omega : f(x) \geq c\}\big) \ \leq \ \frac{1}{c} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Falls $c = \infty$: Siehe 2.16, 9).

Falls $c < \infty$: $E := f^{-1}\big([c, \infty]\big)$ ist messbar und

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \ = \ \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_{E^c} f \,\mathrm{d}\mu}_{\geq 0} \ \geq \ \int_E f \,\mathrm{d}\mu \ \geq \ \int_E c \,\mathrm{d}\mu \ = \ c\mu(E).$$

□

2.25 Folgerung: $\displaystyle\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = 0 \ \Rightarrow \ f = 0$ f.ü. ($\exists N \in \Sigma : \mu(N) = 0 \ \wedge \ f\big|_{\Omega \setminus N} = 0$).

Beweis: $A_j := \Big\{x \in \Omega : |f(x)| > \dfrac{1}{j}\Big\} \ \Rightarrow \ \mu(A_j) \leq j \displaystyle\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$

$$\Rightarrow \ \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}\big) \ = \ \mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) \ \underset{1.12}{\overset{A_j \subseteq A_{j+1}}{=}} \ \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) \ = \ 0.$$

□

2.26 Folgerung: Für $f, g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt

$$f = g \text{ f.ü.} \ \Leftrightarrow \ \forall A \in \Sigma : \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Siehe 2.16, 8).

$\Leftarrow$: O.B.d.A. $\forall x \in \Omega : f(x), g(x) \notin \{-\infty, \infty\}$.

Sonst ändere f, g auf Nullmengen ab (siehe 2.16, 9)), Integralwerte bleiben gleich.

$h := f - g \ \Rightarrow \ \forall A \in \Sigma : \displaystyle\int_A h \,\mathrm{d}\mu = 0.$

$A := \big\{x \in \Omega : h(x) \geq 0\big\} \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_\Omega h_+ \,\mathrm{d}\mu = \int_A h \,\mathrm{d}\mu = 0.$

$\underset{2.25}{\overset{|h_+| = h_+}{\Rightarrow}} \ h_+ = 0$ f.ü.

Genauso: $f_- = 0$ f.ü.

$\Rightarrow \ h = h_+ - h_- = 0$ f.ü.

□

2.27 Bemerkung: Auf $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist

$$f \sim g \ :\Leftrightarrow \ f = g \text{ f.ü.}$$

eine Äquivalenzrelation. Zu jedem $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ existiert $g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $g : \Omega \to \mathbb{R} \ \wedge \ f \sim g$, da $\mu\big(f^{-1}(\{-\infty, \infty\})\big) = 0$, siehe 2.16, 9).

***2.28 Definition**:* $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **μ-messbar**, falls f messbar ist bezüglich der Vervollständigung $(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$ (vgl. 1.14). Die Voraussetzung „μ-messbar" ist schwächer als „messbar".

***2.29 Bemerkung**:* **1)** $f \in L^1(\Omega, \Sigma^*, \mu^*) \ \wedge \ f = g$ f.ü. $\Rightarrow \ g \in L^1(\Omega, \Sigma^*, \mu^*)$.

2) Alle Konvergenzsätze gelten genauso für μ-messbare Funktionen. Hierbei müssen die Voraussetzungen nur f.ü. gelten. Z.B. majorisierte Konvergenz:

$$f_j, f, g \text{ messbar } \wedge \ f = \lim_{j\to\infty} f_j \text{ f.ü. } \wedge \ |f_j| \le g \text{ f.ü. } \wedge \ \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

2.4 Riemann- und Lebesgue-Integral

***2.30 Satz**:* Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Riemann-integrierbar über $[a, b]$,

(ii) $\lambda^{(1)}\big(\{x \in [a, b] : f \text{ ist unstetig in } x\}\big) = 0$.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so ist f Lebesgue-integrierbar über $[a, b]$ mit

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} \ = \ \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Beweis: O.B.d.A. $a = 0, \ b = 1$.

1) Zu festem $n \in \mathbb{N}$ sei

$$I_1 := \Big[0, \frac{1}{2^n}\Big], \quad I_j := \Big]\, \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\Big] \text{ für } j = 2, \ldots, 2^n,$$
$$m_j := \inf\big\{f(x) : x \in I_j\big\}, \quad M_j := \sup\big\{f(x) : x \in I_j\big\}, \ j = 1, \ldots, 2^n,$$
$$g_n := \sum_{j=1}^{2^n} m_j \chi_{I_j}, \quad G_n := \sum_{j=1}^{2^n} M_j \chi_{I_j}.$$

Dann

a) $U_n := \int_{[0,1]} g_n \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}$, $O_n := \int_{[0,1]} G_n \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}$: Riemannsche Unter-/Obersummen.

b) g_n, G_n einfach, $g_j(x) \le g_{j+1}(x) \le f(x) \le G_{j+1}(x) \le G_j(x)$ für $x \in [0, 1]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g := \lim_{j\to\infty} g_j, \ G := \lim_{j\to\infty} G_j \text{ sind messbar (siehe 2.9)}, \\ g_1 \le g \le f \le G \le G_1 \text{ auf } [0, 1] \end{cases}$$

$\overset{2.16}{\Rightarrow}$ $g = \chi_{[0,1]} g, G \in L^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)}\big)$

$\overset{\text{monotone Konvergenz}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{j\to\infty} U_j = \lim\limits_{j\to\infty} \int_{[0,1]} g_j \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_{[0,1]} g \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}, \ \lim\limits_{j\to\infty} O_j = \int_{[0,1]} G \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}$.

2) $D := \{x \in [0,1] : f$ unstetig in $x\}$

$\Rightarrow \ D \subseteq \underbrace{\left\{\frac{j}{2^n} : n \in \mathbb{N} \ \wedge \ 0 \le j \le 2^n\right\}}_{\text{abzählbar, also Nullmenge}} \cup \big\{x \in [0,1] : g(x) < G(x)\big\}$.

3) $\Rightarrow$: f ist R-integrierbar $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{j\to\infty} U_j = \lim\limits_{j\to\infty} O_j =: \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\overset{1)}{\Rightarrow}$ $G - g \ge 0 \ \wedge \ \int_{[0,1]} (G-g)\,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = 0$

$\overset{2.25}{\Rightarrow}$ $G = g$ f.ü., insbesondere $\lambda^{(1)}(D) = 0$

$\underset{g \le f \le G}{\overset{\lambda^{(1)} \text{ vollständig}}{\Rightarrow}}$ $f = g$ f.ü. und $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_{[0,1]} g \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4) $\Leftarrow$: $\lambda^{(1)}(D) = 0 \ \Rightarrow \ G = g$ f.ü. $\overset{1)}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{j\to\infty} U_j = \lim\limits_{j\to\infty} O_j \ \Rightarrow \ f$ R-integrierbar.

□

2.31 Satz: Sei $I =]a,b[$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar über jedem Intervall $[c,d] \subseteq I$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Lebesgue-integrierbar über I,

(ii) $|f|$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über I, d.h. $\lim\limits_{c\downarrow a} \lim\limits_{d\uparrow b} \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existiert.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so gilt $\int_I f \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis: **1)** Sei $a < a_j < b_j < b$ mit $a_j \downarrow a \ \wedge \ b_j \uparrow b$.

Setze $f_j := |f| \cdot \chi_{[a_j,b_j]} : \big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)}\big) \to \mathbb{R}$. Dann:

- f_j Lebesgue-integrierbar (2.30), insbesondere messbar,
- $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$,
- $|f| = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$.

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int_{a_j}^{b_j} f_j(x) \overset{2.30}{=} \lim_{j\to\infty} \int_I f_j \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} \underset{\text{Konv.}}{\overset{\text{mon}}{=}} \int_I \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_I |f| \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}. \qquad (*)$$

2) (ii) $\Leftrightarrow$ linker Grenzwert in $(*)$ existiert in $\mathbb{R}$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $\int_I |f| \,\mathrm{d}\lambda^{(1)} < \infty$

$\Leftrightarrow$ (i)

3) Mit $g_j := f \cdot \chi_{[a_j,b_j]},\ |g_j| \leq |f|,\ f \in L^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)}\big)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{j\to\infty} \int_{a_j}^{b_j} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{2.30}{=} \lim_{j\to\infty} \int_I g_j\,\mathrm{d}\lambda^{(1)} \\ &\overset{\text{major. Konv.}}{=} \int_I \big(\lim_{j\to\infty} g_j\big)\,\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int_I f\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}. \end{aligned}$$

$\square$

2.32 Beispiel: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (beachte: $\dfrac{\sin x}{x}$ ist in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar).

Riemann: $\displaystyle\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{b\to\infty}{\to} \frac{\cos 1}{1} - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Das uneigentliche Integral ist konvergent, da $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2} \ \wedge\ \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konvergiert als uneigentliches Riemann-Integral.

Aber:
$$\begin{aligned} \int_0^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &\geq \int_\pi^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^k \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j+1)\pi} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x}_{=\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2} \to \infty \text{ für } k \to \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ ist divergent

$\overset{2.31}{\Rightarrow}\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist nicht Lebesgue-integrierbar über $[0,\infty[$.

Allgemeiner:
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \alpha \leq 0: & \text{existiert weder als R- noch als L-Integral} \\ 0 < \alpha \leq 1: & \text{existiert als R-Integral, nicht als L-Integral} \\ 1 < \alpha < 2: & \text{existiert als R-Integral und als L-Integral} \\ \alpha \geq 2: & \text{existiert weder als R- noch als L-Integral} \end{cases}$$

3 Produktmaße

3.1 Produkt-σ-Algebra: Seien (Ω, Σ), (Ω', Σ') messbare Räume. Dann ist

$$h \;:=\; \{A \times B : A \in \Sigma \;\wedge\; B \in \Sigma'\}$$

ein Halbring und

$$\Sigma \otimes \Sigma' \;:=\; \sigma(h)$$

die **Produkt-σ-Algebra** auf $\Omega \times \Omega'$. Für $M \in \Sigma \otimes \Sigma'$ und $a \in \Omega$, $b \in \Omega'$ seien die Schnitte

$$\begin{aligned} M_a &:= \{y \in \Omega' : (a, y) \in M\}, \\ M^b &:= \{x \in \Omega : (x, b) \in M\}. \end{aligned}$$

Dann folgt $M_a \in \Sigma'$, $M^b \in \Sigma$: Setze

$$\mathcal{M} := \{M \subseteq \Omega \times \Omega' \mid \forall a \in \Omega : M_a \in \Sigma' \;\wedge\; \forall b \in \Omega' : M^b \in \Sigma\}$$

(Prinzip der guten Mengen). Dann

1) $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra.

2) $h \subseteq \mathcal{M}$, denn für $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma'$ gilt $(A \times B)_a = \begin{cases} \emptyset & a \notin A \\ B & a \in A \end{cases} \in \Sigma'$.

1) $\wedge$ 2) $\;\Rightarrow\;$ $\Sigma \otimes \Sigma' = \sigma(h) \subseteq \mathcal{M}$.

3.2 Folgerung: Ist $f : (\Omega \times \Omega', \Sigma \otimes \Sigma') \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann sind auch die Schnitte $f(x, .) : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f(., y) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes feste $x \in \Omega$ bzw. $y \in \Omega'$ messbar.

Beweis: $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\;\Rightarrow\;$ $\big(f(x, .)\big)^{-1}(A) = \{y \in \Omega' : f(x, y) \in A\} = \big(f^{-1}(A)\big)_x \in \Sigma'$. $\square$

3.3 Prä-Produktmaß: Seien (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') σ-endliche Maßräume, h wie in 3.1. Dann ist

$$\rho(A \times B) \;:=\; \mu(A) \cdot \mu'(B) \quad \text{(mit } 0 \cdot \infty := 0)$$

ein σ-endliches Prämaß auf h.

Beweis: **(M1):** $\rho(\emptyset) = 0$ ✓

(M2): $\rho(A \times B) \geq 0$ ✓

(M3): Sei $A \times B = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}}(A_j \times B_j)$.

Dann gilt für $j \neq k$: $A_j \cap A_k = \emptyset \ \vee \ B_j \cap B_k = \emptyset \ \Rightarrow \ (A_j \times B_j)_x \cap (A_K \cap B_k)_x = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \rho(A \times B) \quad &= \quad \mu'(B) \cdot \mu(A) \\
&= \quad \int_\Omega \mu'(B) \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu \\
&= \quad \int_\Omega \mu'\big((A \times B)_x\big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \quad \int_\Omega \mu'\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}}(A_j \times B_j)_x\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{\mu' \text{ Maß}}{=} \quad \int_\Omega \sum_{j=1}^\infty \underbrace{\mu'\big((A_j \times B_j)_x\big)}_{=\mu'(B_j)\cdot\chi_{A_j} \geq 0} \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{\text{mon. Konv}}{=} \quad \sum_{j=1}^\infty \int_\Omega \mu'(B_j) \cdot \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \quad \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \cdot \mu(A_j) \\
&= \quad \sum_{j=1}^\infty \rho(A_j \times B_j).
\end{aligned}$$

σ-endlich: Es gelte $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, $\Omega' = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ mit $\mu(A_j) < \infty$ und $\mu(B_j) < \infty$.

$$\Rightarrow \ \Omega \times \Omega' \ = \ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \ = \ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big(A_j \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) \ = \ \bigcup_{j,k\in\mathbb{N}} \underbrace{(A_j \times B_k)}_{\in h}$$

mit $\rho(A_j \times B_k) = \mu(A_j)\mu'(B_k) < \infty$. $\square$

3.4 Produktmaß: **1)** Seien (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß ρ auf $\Sigma \otimes \Sigma'$ mit

$$\rho(A \times B) \ = \ \mu(A) \cdot \mu'(B) \quad \text{für } A \in \Sigma, \ B \in \Sigma'$$

(vgl. Fortsetzungssatz 1.10). Schreibe $\mu \otimes \mu' := \rho$ (**Produktmaß**).

2) Entsprechend: $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein **Produktmaß** $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ auf $\bigotimes_{j=1}^n \Sigma_j$ mit

$$\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\big(\bigtimes_{j=1}^n A_j\big) \ = \ \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j) \quad \text{für } A_j \in \Sigma_j.$$

3.5 Spezialfall: $\Omega_j = \mathbb{R}$, $\Sigma_j = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_j = \mu^{(1)} =$ Lebesgue-Borel-Maß, $\mu^{(1)}\big(\,]a,b]\big) = b - a$ für $a \le b$. Dann ist

$$\mu^{(n)} \;:=\; \bigotimes_{j=1}^{n} \mu^{(1)}$$

das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$, denn man kann zeigen, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;=\; \sigma\Big(\Big\{ \bigtimes_{j=1}^{n}\,]a_j, b_j] : a_j \le b_j \Big\}\Big).$$

Die Vervollständigung $\lambda^{(n)}$ ist das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt

$$\lambda^{(n)}\Big(\bigtimes_{j=1}^{n}\,]a_j, b_j] \Big) \;=\; \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \quad \text{für } a_j \le b_j.$$

3.6 Satz: Seien (Ω, Σ, μ), (Ω', Σ', μ') σ-endliche Maßräume.

1) Für $M \in \Sigma \otimes \Sigma'$ sind

$$\begin{aligned} \varphi_M :&\quad \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : \quad x \mapsto \mu'(M_x) \\ \varphi'_M :&\quad \Omega' \to \overline{\mathbb{R}} : \quad y \mapsto \mu(M^y) \end{aligned}$$

messbar.

2) Für

$$\begin{aligned} \tilde\rho(M) \;&:=\; \int_\Omega \varphi_M \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_\Omega \mu'(M_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ \rho'(M) \;&:=\; \int_{\Omega'} \varphi'_M \,\mathrm{d}\mu' \;=\; \int_{\Omega'} \mu(M^y)\,\mathrm{d}\mu'(y) \end{aligned}$$

gilt $\tilde\rho = \rho' = \mu \otimes \mu'$.

Beweis: **1)** Siehe Elstrodt: Satz 1.3 in Kapitel V.

2) Zeige $\tilde\rho, \rho'$ sind Fortsetzungen des auf $h = \Sigma \times \Sigma'$ definierten Prämaßes ρ auf $\Sigma \otimes \Sigma$. Fortsetzung ist eindeutig $\Rightarrow\;\; \tilde\rho = \mu \otimes \mu' = \rho'$.

a) ρ ist Fortsetzung: Seien $A \in \Sigma,\; B \in \Sigma'$. Dann

$$\tilde\rho(A \times B) \;=\; \int_\Omega \underbrace{\mu'\big((A \times B)_x\big)}_{=\mu'(B)\cdot\chi_A(x)} \,\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \int_A \mu'(B)\,\mathrm{d}\mu \;=\; \mu'(B) \cdot \mu(A).$$

$\Rightarrow\;\; \tilde\rho = \rho$ auf h.

b) ρ ist Maß: **(M1)** $\tilde\rho(\emptyset) = 0$ ✓

(M2) $\tilde\rho(M) \ge 0$ ✓

(M3)
$$\begin{aligned}
\tilde\rho\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}}M_j\Big) &\overset{\text{Def. }\tilde\rho}{=} \int_\Omega \mu'\Big(\underbrace{\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}}M_j\Big)_x}_{=\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(M_j)_x}\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^\infty \mu'\big((M_j)_x\big)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\overset{2.20}{=} \sum_{j=1}^\infty \int_\Omega \mu'\big((M_j)_x\big)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \sum_{j=1}^\infty \tilde\rho(M_j).
\end{aligned}$$

□

3.7 Satz von Fubini I: Seien (Ω,Σ,μ), (Ω',Σ',μ') σ-endliche Maßräume, $f:(\Omega\times\Omega',\Sigma\otimes\Sigma')\to[0,\infty]$ messbar. Dann sind

$$f_1:\Omega\to[0,\infty]:x\mapsto\int_{\Omega'}\underbrace{f(x,.)}_{\text{messbar nach 3.2}}\,\mathrm{d}\mu'$$
$$f_2:\Omega'\to[0,\infty]:y\mapsto\int_\Omega f(.,y)\,\mathrm{d}\mu$$

messbar und

$$\int_{\Omega\times\Omega'} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \int_\Omega\Big(\int_{\Omega'}f(x,y)\,\mathrm{d}\mu'(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'}\Big(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y).$$

Beweis: Für $M\in\Sigma\otimes\Sigma'$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times\Omega'}\chi_M\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') &= (\mu\otimes\mu')(M)\\
&\overset{3.6}{=} \int_{\Omega'}\mu(M^y)\,\mathrm{d}\mu'(y)\\
&= \int_{\Omega'}\Big(\int_\Omega \underbrace{\chi_{M^y}(x)}_{=\chi_M(x,y)}\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y).
\end{aligned}$$

$\overset{\text{Linearkombination}}{\Rightarrow}$ Für alle einfachen Funktionen g gilt

$$y \mapsto \int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \text{ ist messbar,}$$
$$\int_{\Omega\times\Omega'} g\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \int_{\Omega'}\Big(\int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y).$$

2.13 $\Rightarrow$ Es gibt eine Folge (g_j) einfacher Funktionen mit $0\le g_1\le g_2\le\dots$ und $f=\lim\limits_{j\to\infty}g_j$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\Omega\times\Omega'} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') &\overset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega'} g_j\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu')\\
&\overset{g_j\text{ einfach}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega'}\Big(\int_\Omega g_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y)\\
&\overset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \int_{\Omega'}\Big(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y)\\
&\overset{\substack{\text{monotone}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \int_{\Omega'}\Big(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y)
\end{aligned}$$

Beachte: $f_2(y) = \lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega g_j(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{2.9}{\Rightarrow} f_2$ ist messbar. $\square$

3.8 Satz von Fubini II: Seien (Ω,Σ,μ), (Ω',Σ',μ') σ-endliche Maßräume, $f : (\Omega\times\Omega',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu') \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $f(x,.)$ (für festes $x\in\Omega$) und $f(.,y)$ (für $y\in\Omega'$) messbar. Ist eines der Integrale

$$\int_{\Omega\times\Omega'} |f|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu'), \quad \int_\Omega \Big(\int_{\Omega'} \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}\mu'(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \int_{\Omega'} \Big(\int_\Omega \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y) \qquad (*)$$

endlich, so sind alle drei Integralwerte gleich, und es gilt $f \in L^1(\Omega\times\Omega',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu')$. Darüberhinaus gelten

$$\left.\begin{array}{ll} f(.,y) \in L^1(\Omega,\Sigma,\mu) & \text{für fast alle } y\in\Omega' \\ f(x,.) \in L^1(\Omega',\Sigma',\mu') & \text{für fast alle } x\in\Omega \end{array}\right\} \qquad (**)$$

und

$$\int_{\Omega\times\Omega'} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') = \int_\Omega \Big(\int_{\Omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu'(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} \Big(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu'(y). \qquad (***)$$

Achtung: Die inneren Integrale in $(***)$ sind eventuell nicht definiert, da z.B. die Existenz von $f_1(x) = \int_{\Omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu'(y)$ nur für fast alle $x\in\Omega$ gesichert ist.

Abhilfe: $A := \big\{x\in\Omega : \int_{\Omega'} \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}\mu'(y) = \infty\big\} \;\Rightarrow\; A$ messbar, $\mu(A)=0$. Ändere f_1 auf Ω messbar ab zu $\tilde f_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x\in A^c \\ 0 & \text{für } x\in A \end{cases}$ und definiere $\int_\Omega f_1\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega \tilde f_1\,\mathrm{d}\mu.$

Beweis: **1)** f messbar $\Rightarrow$ f_+, f_- messbar

$\overset{3.2}{\Rightarrow}$ $f_{1+},\ f_{1-},\ f_{2+},\ f_{2-}$ sind messbar

$\Rightarrow$ f_1, f_2 messbar.

2) f messbar $\Rightarrow$ $|f|$ messbar

3.7 $\Rightarrow$ Integrale in $(*)$ sind gleich (auch falls $=\infty$)

$$\int_{\Omega\times\Omega'} |f|\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu') < \infty \quad\Rightarrow\quad f\in L^1(\Omega\times\Omega',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu')$$

$$g_1(x) := \int_{\Omega'} \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}\mu'(y) \quad \overset{(*)<\infty}{\Rightarrow} \quad g_1\in L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$$

$$\overset{2.16}{\Rightarrow} \quad A := \{x\in\Omega : g_1(x)=\infty\}\in\Sigma \;\wedge\; \mu(A)=0$$

Genauso: $B := \Big\{y\in\Omega' : \int_\Omega \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}\mu(x) = \infty\Big\} \in \Sigma' \;\wedge\; \mu'(B)=0$

$\Rightarrow$ $(**)$.

Die restlichen Behauptungen folgen durch Anwendung von 3.7 auf f_+, f_-. $\square$

***3.9 Projizierbare Mengen**:* Sei (Ω, Σ, μ) Maßraum, $\Omega' = \mathbb{R}$, $\Sigma' =$ Borel-Sigma-Algebra, $\mu' =$ Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, $M \in \Sigma$. Sind $u, o : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar mit $u \le o$ auf M, so gilt

$$K \;:=\; \big\{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : x \in M \;\wedge\; u(x) \le t \le o(x)\big\} \;\in\; \Sigma \otimes \Sigma'.$$

Ist $f : (\Omega \times \mathbb{R}, \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu') \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gilt

$$\int_M \Big(\int_{[u(x),o(x)]} \big|f(x,t)\big| \,\mathrm{d}\mu'(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \;<\; \infty,$$

so gilt $\chi_K \cdot f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}, \Sigma \otimes \Sigma', \mu \otimes \mu')$ und

$$\int_K f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') \;=\; \int_M \Big(\int_{[u(x),o(x)]} f(x,t) \,\mathrm{d}\mu'(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Beweis: **1)** Seien $\big(a_j^{(k)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ geeignete Folgen, so dass $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}} [a_j^{(k)}, a_j^{(k)} + \frac{1}{k}\,[$. Dann

$$\begin{aligned}
&\big\{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : x \in M \;\wedge\; t \le o(x)\big\} \;= \\
&\quad = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big(\big(o^{-1}\big([a_j^{(k)}, a_j^{(k)} + \tfrac{1}{k}\,[\big) \cap M\big) \times \,]-\infty, a_j^{(k)} + \tfrac{1}{k}\,[\Big) \;\in\; \Sigma \otimes \Sigma'.
\end{aligned}$$

Genauso: $\big\{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : x \in M \;\wedge\; u(x) \le t\big\} \in \Sigma \otimes \Sigma'$.
Schnitt $\Rightarrow\; K \in \Sigma \otimes \Sigma'$.

2) Rest folgt aus Fubini, z.B.

$$\begin{aligned}
\int_K |f| \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}} |f| \cdot \chi_K \,\mathrm{d}(\mu \otimes \mu') \\
&\overset{\text{Fubini I}}{=} \int_\Omega \Big(\int_\mathbb{R} \big|f(x,t)\big| \underbrace{\chi_K(x,t)}_{=\chi_M(x)\cdot\chi_{[u(x),o(x)]}(t)} \,\mathrm{d}\mu'(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_\Omega \chi_M(x) \Big(\int_\mathbb{R} \big|f(x,t)\big| \chi_{[u(x),o(x)]}(t) \,\mathrm{d}\mu'(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_M \Big(\int_{[u(x),o(x)]} \big|f(x,t)\big| \,\mathrm{d}\mu'(t)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

$\square$

***3.10 Beispiel**:* $K = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3 \;\wedge\; x^2 + y^2 \le (3-z)^2\big\}$: Kegel mit Höhe $h = 3$, Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $r = 3$.

$$\begin{aligned}
\int_K z \,\mathrm{d}\lambda^{(3)} &= \int_{x^2+y^2\le 9} \Big(\int_{\left[0,3-\sqrt{x^2+y^2}\right]} z \,\mathrm{d}\lambda^{(1)}(z)\Big) \,\mathrm{d}\lambda^{(2)}(x,y) \\
&= \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2\le 9} \Big(3 - \sqrt{x^2+y^2}\Big)^2 \,\mathrm{d}\lambda^{(2)} \\
&= \frac{27}{4}\pi.
\end{aligned}$$

3.11 Definition: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi : U \to V$ heißt **C^1-Diffeomorphismus** zwischen U und V, falls

1) Φ bijektiv und

2) $\Phi \in C^1(U \to V) \ \wedge \ \Phi^{-1} \in C^1(V \to U)$.

3.12 Wiederholung: Aus dem Satz über implizite Funktionen: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi \in C^1(U \to V)$, $x_0 \in U$ mit $\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0)\right) \neq 0$ (Jacobi Matrix $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=1,\ldots,n}$).
Dann existiert eine offene Umgebung $O(x_0) \subseteq U$, so dass $\Phi : O(x_0) \to \Phi\big(O(x_0)\big)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt

$$\left(\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial y}\big(\Phi(x_0)\big)\right) \ = \ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0)\right)^{-1}.$$

3.13 Kriterium: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ bijektiv. Dann sind äquivalent:

(i) Φ ist C^1-Diffeomorphismus,

(ii) $\Phi \in C^1(U \to V) \ \wedge \ \det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \neq 0$ auf V.

3.14 Transformationssatz: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ C^1-Diffeomorphismus und $A \subseteq U$ messbar, d.h. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{\Phi(A)} f \,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \ = \ \int_A (f \circ \Phi) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right| \mathrm{d}\lambda^{(n)}$$

für jedes $f \in L^1\big(\Phi(A), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(A), \lambda^{(n)}\big|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cap \Phi(A)}\big) \overset{\text{Übung}}{\Leftrightarrow} \tilde{f} \in L^1\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda^{(n)}\big)$ mit $\tilde{f} := \begin{cases} 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus A, \\ f & \text{in } A. \end{cases}$

Beweis: Siehe z.B. Elstrodt. $\square$

***3.15 Beispiel** (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$):*

- $U := \,]0, \infty[\, \times \,]0, 2\pi[\,$,
- $V := \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, 0) : x \geq 0\big\}$,

- $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda^{(2)} \;=\; \int_U (f\circ\Phi)\cdot r\,\mathrm{d}\lambda^{(2)} \;\overset{\text{Fubini}}{=}\; \int_{[0,\infty[}\Big(\int_{[0,\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}(\varphi)\Big)\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}(r)$$

falls $f \in L^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \lambda^{(2)}\big)$.

Konkret:

$$\int_{x^2+y^2\le 9}\Big(3-\sqrt{x^2+y^2}\Big)^2\,\mathrm{d}\lambda^{(2)} \;=\; \int_{r=0}^{3}\Big(\int_{\varphi=0}^{2\pi}(3-r)^2 r\,\mathrm{d}\varphi\Big)\,\mathrm{d}r \;=\; \frac{27}{2}\pi.$$

***3.16 Bemerkung**:* Satz von Sard besagt:

$$\begin{aligned}&U\subseteq\mathbb{R}^n \text{ offen}, \Phi\in C^1(U\to\mathbb{R}^n),\ N := \Big\{x\in U : \det\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)(x)=0\Big\}\\ &\Rightarrow\ \lambda^{(n)}\big(\Phi(N)\big)=0.\end{aligned}$$

Damit Verallgemeinerung des Transformationssatzes möglich: Ist $\Phi\in C^1(U\to\mathbb{R}^n)$, $\Phi\big|_{U\setminus N}$ injektiv und $A\subseteq U$ messbar, so gilt die Transformationsformel

$$\int_{\Phi(A)} f\,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \;=\; \int_A (f\circ\Phi)\cdot\Big|\det\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big|\,\mathrm{d}\lambda^{(n)}.$$

4 L^p-Räume

4.1 Vorbemerkung: Für $f:(\Omega,\Sigma,\mu)\to\mathbb{C}$ ist

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \;:=\; \int_\Omega (\operatorname{Re} f)\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_\Omega (\operatorname{Im} f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Sätze wie z.B. majorisierte Konvergenz, Fubini gelten entsprechend. Wir schreiben $\mathbb{K}$, wenn $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ möglich ist.

4.2 Definition: Sei $f:(\Omega,\Sigma,\mu)\to\mathbb{K}$ messbar.

1) Für $1\le p<\infty$ sei

$$N_p(f) \;:=\; \Big(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$$

($|f|^p=(.)^p\circ|f|$ ist messbar).

2) $N_\infty \;:=\; \inf\big\{c\in[0,\infty] : |f|\le c \text{ f.ü.}\big\} \;=:\; \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f|$ heißt **wesentliches Supremum** von f.

4.3 Folgerung: **1)** Für $1\le p\le\infty$ gelten $0\le N_p(f)\le\infty$ und $N_p(\alpha f)=|\alpha|\cdot N_p(f)$ (mit $0\cdot\infty:=0$).

2) Es gilt $|f|\le N_\infty(f)$ f.ü.:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\big\{x\in\Omega : \big|f(x)\big|>N_\infty(f)\big\}\Big) \;&=\; \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\big\{x\in\Omega : \big|f(x)\big|>N_\infty(f)+\frac{1}{j}\big\}\Big)\\
&\overset{\text{1.12, 2)}}{=} \lim_{j\to\infty}\underbrace{\mu\Big(\big\{x\in\Omega : \big|f(x)\big|>N_\infty(f)+\frac{1}{j}\big\}\Big)}_{=0 \text{ (Def. von } N_\infty(f))}\\
&=\; 0
\end{aligned}$$

3) $N_\infty(f+g)\le N_\infty(f)+N_\infty(g)$:

$$\big|f(x)+g(x)\big| \;\le\; \big|f(x)\big|+\big|g(x)\big| \;\overset{2)}{\le}\; N_\infty(f)+N_\infty(g) \text{ f.ü.}$$

4.4 Definition: $p,q\in[1,\infty]$ heißen **konjugiert**, falls

1) $p,q<\infty \;\wedge\; \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ oder

2) $p=1 \;\wedge\; q=\infty$ oder $p=\infty \;\wedge\; q=1$.

Wichtiger Spezialfall: $p=q=2$.

4.5 Satz: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar.

1) Für $1 < p, q < \infty$, p, q konjugiert, gilt die **Höldersche Ungleichung**:

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \;\le\; \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/q}.$$

2) Für $1 \le p < \infty$ gilt die **Minkowski-Ungleichung**:

$$\Big(\int_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \;\le\; \Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} + \int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p}.$$

Beweis: **1)** **a)** Hilfsungleichung: $t \mapsto \mathrm{e}^t$ ist konvex, d.h. für $t, s \in \mathbb{R}$ und $0 \le \lambda \le 1$ gilt

$$\mathrm{e}^{\lambda t + (1-\lambda)t} \;\le\; \lambda \mathrm{e}^t + (1-\lambda)\mathrm{e}^s.$$

Für $0 < x, y < \infty$ wähle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $x = \mathrm{e}^{\xi/p},\; y = \mathrm{e}^{\eta/q} = \mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\eta}$.

$$\Rightarrow\; x \cdot y \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\xi + (1-\frac{1}{p})\eta} \;\le\; \frac{1}{p}\mathrm{e}^\xi + \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\mathrm{e}^\eta \;=\; \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q.$$

Offensichtlich gilt $x \cdot y \le \dfrac{1}{p}\, x^p + \dfrac{1}{q}\, y^q$ sogar für $0 \le x, y \le \infty$.

b) Spezialfall $N_p(f) = N_q(g) = 1$: Zeige $\displaystyle\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \le 1$.

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \;\overset{\text{a)}}{\le}\; \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1.$$

c) Fall $0 < N_p(f), N_q(g) < \infty$:

$$\begin{aligned}
& N_p\Big(\frac{f}{N_p(f)}\Big) = 1,\; N_q\Big(\frac{g}{N_q(g)}\Big) = 1 \\
& \quad \Rightarrow\; \int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \;=\; N_p(f) \cdot N_q(g) \int_\Omega \Big| \frac{f}{N_p(f)} \cdot \frac{g}{N_q(g)} \Big| \, \mathrm{d}\mu \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\text{b)}}{\le}\; N_p(f) \cdot N_q(g) \cdot 1.
\end{aligned}$$

d) Restliche Fälle: $N_p(f) = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ f.ü. $\Rightarrow\; f \cdot g = 0$ f.ü. $\Rightarrow\; N_1(f \cdot g) = 0$ ✓
$N_p(f) > 0 \;\wedge\; N_q(g) = \infty \;\Rightarrow$ Behauptung.
Genauso: f, g und p, q vertauscht.

2) Für $p = 1$ klar. Sei $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
O.B.d.A.: $N_p(f+g) > 0$, $N_p(f), N_p(g) < \infty$. Dann

$$\begin{aligned}
|f(x) + g(x)|^p \;&\le\; 2\big(\max\{|f(x)|, |g(x)|\}\big)^p \;=\; 2 \max\big\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\big\} \\
&\le\; 2\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) \\
\Rightarrow\; N_p(f+g) \;&<\; \infty.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\big(N_p(f+g)\big)^p &= \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{1)}{\le} N_p(f) \cdot N_q\big(|f+g|^{p-1}\big) + N_p(g) \cdot N_q\big(|f+g|^{p-1}\big) \\
&\overset{p=q(p-1)}{=} \big(N_p(f) + N_p(g)\big)\big(N_p(f+g)\big)^{p/q}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \big(N_p(f+g)\big)^{p-\frac{p}{q}} \le N_p(f) + N_p(g)$$

$\overset{p-\frac{p}{q}=1}{\Rightarrow}$ Behauptung $\square$

***4.6 Folgerung**:* **1)** Für $1 \le p, q \le \infty$, p, q konjugiert, gilt

$$N_1(f \cdot g) \le N_p(f) \cdot N_p(g).$$

2) Für $1 \le p \le \infty$ gelten die $\triangle$-Ungleichung:

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g)$$

und, falls $N_p(f) < \infty \lor N_p(g) < \infty$, die $\triangle$-Ungleichung nach unten:

$$N_p(f-g) \ge \big|N_p(f) - N_p(g)\big|.$$

Beweis: **1)** $1 < p, q < \infty$: Siehe 4.5.

$p = 1 \land q = \infty$: $N_1(f \cdot g) = \displaystyle\int_\Omega \underbrace{|f \cdot g|}_{\le |f| \cdot N_\infty(g) \text{ f.ü.}} \mathrm{d}\mu \le N_\infty(g) \cdot \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$.

2) $\triangle$-Ungleichung: Siehe 4.5 bzw. 4.3, 3).
$\triangle$-Ungleichung nach unten: $N_p(f) \le N_p(f-g) + N_p(g) \ldots$. $\square$

***4.7 Folgerung**:* $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \big\{f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; f \text{ messbar} \land N_p(f) < \infty\big\}$ ist ein Vektorraum und N_p eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ($1 \le p \le \infty$).

***4.8 Definition**:* Sei $1 \le p \le \infty$ und

$$N := \big\{f : \Omega \to \mathbb{K} \;\big|\; N_p(f) = 0\big\} = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

N ist Unterraum von $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Durch

$$f \sim g \;:\Leftrightarrow\; f - g \in N$$

wird auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ eine Äquivalenzrelation definiert. Setze

$$\begin{aligned} L^p(\Omega, \Sigma, \mu) &:= \big\{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)\big\} \;=\; \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)/N, \\ \big\| [f] \big\|_p &:= N_p(f) \quad \text{für } [f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu). \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit: $[g] = [f] \;\Leftrightarrow\; N_p(g - f) = 0 \;\overset{N_p(f)<\infty}{\Rightarrow}\; \big|N_p(g) - N_p(f)\big| \leq N_p(f - g) = 0$.
Dann ist $\|.\|_p$ eine Norm auf $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, denn

$$\big\| [f] \big\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in N \;\Leftrightarrow\; f \sim 0 \;\Leftrightarrow\; [f] = [0]$$

(Positivität, Homogenität, $\triangle$-Ungleichung klar).
Im Folgenden schreibe $L^p(\Omega)$ oder L^p statt $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und f anstelle von $[f]$.

4.9 Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\wedge$ $f, g \in C(\Omega \to \mathbb{K})$ $\wedge$ $\|f - g\|_p = 0$. Dann folgt $f = g$ in Ω. D.h. falls ein Vertreter von $[f]$ stetig ist, sind alle anderen Elemente von $[f]$ unstetig.

Beweis: Annahme: $\exists x_0 \in \Omega : \big|f(x_0) - g(x_0)\big| > 0$.
$\overset{f-g \text{ stetig}}{\Rightarrow} \;\exists \delta > 0 \;\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) - g(x) > \dfrac{1}{2}\big|f(x_0) - g(x_0)\big|$
$\Rightarrow\; \|f - g\|^p = \displaystyle\int_\Omega |f - g|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{B_\delta(x_0)} |f - g| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{2}\big|f(x_0) - g(x_0)\big|\mu\big(B_\delta(x_0)\big) > 0$ ↯ □

4.10 Bemerkungen: **1)** Sobolevsche Einbettung: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindestens $\frac{n}{2}$-Mal „schwach differenzierbar" ist und alle Ableitungen in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dann „ist f stetig", d.h. $[f]$ enthält ein stetiges Element.

2) Achtung: Anders als bei stetigen Funktionen liegt das Produkt von L^p-Funktionen nicht unbedingt in $L^p(\Omega)$.

3) Für $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugiert gilt: $f \in L^p \;\wedge\; g \in L^q \;\Rightarrow\; f \cdot g \in L^1$ (siehe 4.6).

4.11 Satz: **1)** $\mu(\Omega) < \infty \;\wedge\; 1 \leq p < p' \leq \infty \;\wedge\; f \in L^{p'}(\Omega)$. Dann

$$f \in L^p(\Omega) \;\wedge\; \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \cdot \|f\|_{p'}.$$

2) $1 \leq p < p' \leq \infty \;\Rightarrow\; L^p(\mathbb{R}) \setminus L^{p'}(\mathbb{R}) \neq \emptyset \;\wedge\; L^{p'}(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

3) $\Omega = \mathbb{N},\; \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\; \mu(M) = \sharp M,\; 1 \leq p < p' \leq \infty$. Dann

$$l^p \;:=\; L^p(\mathbb{N}) \;\subseteq\; l^{p'}.$$

Beweis: Übungen □

4.12 Satz von Fischer-Riesz: Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\big(L^p(\Omega,\Sigma,\mu), \|.\|_p\big)$ ein Banachraum.

Beweis: **1)** $p = \infty$: Sei (f_j) Cauchy. Setze

$$\begin{array}{rcll} A_j & := & \big\{x \in \Omega : \big|f_j(x)\big| > \|f_j\|_\infty\big\} & \overset{4.3,\,2)}{\Rightarrow} \quad \mu(A_j) = 0 \\ B_{j,k} & := & \big\{x \in \Omega : \big|f_j(x) - f_k(x)\big| > \|f_j - f_k\|_\infty\big\} & \Rightarrow \quad \mu(B_{j,k}) = 0 \\ N & := & \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \ \cup \ \bigcup_{j,k\in\mathbb{N}} B_{j,k} & \Rightarrow \quad \mu(N) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ \big|f_j(x) - f_k(x)\big| \ \leq \ \|f_j - f_k\|_\infty \quad \text{für } x \in \Omega \setminus N, \ j,k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere: $\big(f_j(x)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent bezüglich $x \in \Omega \setminus N$:

$$f(x) \ := \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f = \lim\limits_{j\to\infty} \chi_{\Omega\setminus E} \cdot f_j & \text{ist messbar} \\ \|f_j - f\|_\infty \to 0 \end{cases}$$

Insbesondere: $\|f\|_\infty \leq \|f - f_j\|_\infty + \|f_j\|_\infty < \infty$, also $f \in L^\infty$.

2) $1 \leq p < \infty$: Sei (f_j) Cauchy.

a) Wähle eine Teilfolge:

$$\begin{array}{l} f_{j_1} \text{ mit } \|f_{j_1} - f_k\|_p < \dfrac{1}{2} \text{ für } k > j_1 \\ f_{j_2} \text{ mit } j_2 > j_1 \text{ und } \|f_{j_2} - f_k\|_p < \dfrac{1}{2^2} \text{ für } k > j_2 \\ \quad \vdots \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \|f_{j_k} - f_{j_{k+1}}\|_p \ < \ \frac{1}{2^k}.$$

b) Messbare Grenzfunktion f: Setze

$$\begin{aligned} g_k(x) \ &:= \ \sum_{l=1}^{k} \big|f_{j_l}(x) - f_{j_{l+1}}(x)\big| \\ g(x) \ &:= \ \sum_{l=1}^{\infty} \big|f_{j_l}(x) - f_{j_{l+1}}(x)\big| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \|g_k\|_p \ \leq \ \sum_{l=1}^{k} \|f_{j_l} - f_{j_{l+1}}\|_p \ < \ 1.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 \leq g_k \uparrow g & \Rightarrow & 0 \leq g_k^p \uparrow g^p \\ g_k \text{ messbar} & \Rightarrow & g_k^p \text{ messbar} \end{array}\right\} \overset{\text{mon.}}{\underset{\text{Konv}}{\Rightarrow}} \ \|g\|_p^p = \int_\Omega g^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k^p \,\mathrm{d}\mu \leq 1.$$

$\overset{2.16}{\Rightarrow}$ $g < \infty$ f.ü.

$\Rightarrow$ g_k konvergent in $\mathbb{K}$ f.ü.

$f_{j_{k+1}} = f_{j_1} + \sum\limits_{l=1}^{k} (f_{j_{l+1}} - f_{j_l}) \overset{\text{Vergleichskrit.}}{\Rightarrow} (f_{j_k})$ konv. in $\mathbb{K}$ f.ü.

Setze $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}$. (Es ist egal, dass f nur f.ü. definiert ist)

c) Zeige: $f \in L^p \;\wedge\; \|f - f_j\|_p \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$ fest.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{j_k} - f_{j_l}\|_p < \varepsilon$ für $k, l > N$. Aus Lemma von Fatou:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_{j_k} - f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim_{l\to\infty} |f_{j_k} - f_{j_l}|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega |f_{j_k} - f_{j_l}| \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \varepsilon^p\end{aligned}$$

$\Rightarrow\; f_{j_k} - f \in L^p,\; \|f_{j_k} - f\|_p \le \varepsilon$ für $k \ge N$, $f = f - f_{j_k} + f_{j_k} \in L^p$.

□

***4.13 Folgerung** (Weyl):* $1 \le p \le \infty$, (f_j) Cauchy in L^p. Dann existiert $f \in L^p$ mit $\|f - f_j\|_p \to 0$, und es gibt eine Teilfolge $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f \;=\; \lim_{k\to\infty} f_{j_k} \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

***4.14 Satz**:* Sei $1 \le p < \infty$.

1) Für einfache Funktionen $s : \Omega \to \mathbb{K}$ gilt

$$s \in L^p(\Omega) \;\Leftrightarrow\; \mu\big(\{x \in \Omega : s(x) \ne 0\}\big) < \infty.$$

2) $\{s \in L^p : s$ ist einfach$\}$ ist dicht in L^p.

Beweis: **1)** Selber

2) Fall $f \ge 0, f \in L^p$: Es gibt eine Folge (s_j) einfacher Funktionen mit

$$0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f \;\wedge\; \lim_{j\to\infty} s_j = f \quad \text{(vgl. 2.13)}$$
$$\Rightarrow\; |s_j|^p, |f - s_j|^p \le |f|^p.\ \text{Insbesondere } s_j \in L^p.$$

Majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{j\to\infty} \|f - s_j\|_p^p \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f - s_j|^p \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |f - s_j|^p \,\mathrm{d}\mu \;=\; 0.$$

Für allgemeines $f \in L^p$: Zerlege f in positive Funktionen.

□

***4.15 Beobachtung** für $\boldsymbol{p = 2}$:* Durch

$$\langle .,. \rangle : L^2 \times L^2 \to \mathbb{K} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_\Omega f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

$(f, g \in L^2 \;\Rightarrow\; f \cdot \overline{g} \in L^1)$ wird auf L^2 ein **Skalarprodukt** definiert, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{K},\; f, g, h \in L^2$ gelten

(S1) $\langle \alpha \cdot f + \beta \cdot g, h \rangle \; = \; \alpha \cdot \langle f, h \rangle + \beta \cdot \langle g, h \rangle$,

(S2) $\langle g, f \rangle \; = \; \overline{\langle f, g \rangle}$,

(S3) $f \neq 0 \; \Rightarrow \; \langle f, f \rangle > 0$.

Außerdem gelten

$$\langle f, f \rangle^{1/2} \; = \; \Big(\int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/2} \; = \; \|f\|_2$$

und

$$\big| \langle f, g \rangle \big| \; \le \; \int_\Omega \big| f \cdot \overline{g} \big| \, \mathrm{d}\mu \; \overset{\text{Hölder}}{\le} \; \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

***4.16 Bemerkung**:* Man kann beweisen: Ist $\big(L, \langle .,. \rangle\big)$ ein linearer Raum mit Skalarprodukt (d.h. (S1)–(S3) gelten), dann wird durch

$$\|f\|_{\text{ind}} \; := \; \langle f, f \rangle^{1/2}$$

auf L eine Norm definiert, die vom Skalarprodukt **induzierte** Norm, und es gilt die **Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung** (CSB)

$$\big| \langle f, g \rangle \big| \; \le \; \|f\|_{\text{ind}} \cdot \|g\|_{\text{ind}} .$$

***4.17 Satz**:* Das Skalarprodukt ist stetig in jedem Argument, d.h. z.B.

$$f \; = \; \lim_{j \to \infty} f_j \; \Rightarrow \; \langle f, g \rangle \; = \; \lim_{j \to \infty} \langle f_j, g \rangle \, .$$

Beweis: $\big| \langle f, g \rangle - \langle f_j, g \rangle \big| = \big| \langle f - f_j, g \rangle \big| \overset{\text{CSB}}{\le} \|f - f_j\|_{\text{ind}} \cdot \|g\|_{\text{ind}} \to 0$. □

***4.18 Definition**:* **1)** Ein linearer Raum $\big(L, \langle .,. \rangle\big)$ mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**, wenn $\big(L, \|.\|_{\text{ind}}\big)$ vollständig ist.

2) Eine Folge (e_j) in einem Hilbertraum heißt **Orthonormalsystem** (ONS), falls

$$\langle e_j, e_k \rangle \; = \; \delta_{jk} \; = \; \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}$$

***4.19 Satz**:* Sei $\big(H, \langle .,. \rangle\big)$ ein Hilbertraum, (e_j) ein ONS in H und $x \in H$. Dann gelten:

1) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_j \cdot e_k \; \Rightarrow \; \alpha_j = \langle x, e_j \rangle$,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \leq \|x\|_{\text{ind}}^2$ (**Besselsche Ungleichung**);

insbesondere: $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$ ist konvergent,

3) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \;\Leftrightarrow\; \|x\|_{\text{ind}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$ (**Parsevalsche Gleichung**),

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$ ist konvergent.

Beweis: **1)** $x = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \cdot e_k \;\Rightarrow\; \langle x, e_l \rangle \overset{4.17}{=} \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \langle \alpha_k \cdot e_k, e_l \rangle = \alpha_j$

2), 3)
$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \right\|_{\text{ind}} \\ &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k, x - \sum_{k=1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \right\rangle \\ &= \|x\|_{\text{ind}}^2 - \left\langle x, \sum_{l=1}^{j} \langle x, e_l \rangle \cdot e_l \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k, x \right\rangle \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{j} \left\langle \langle x, e_k \rangle \cdot e_k, \langle x, e_l \rangle \cdot e_l \right\rangle \\ &= \|x\|_{\text{ind}}^2 - 2 \sum_{k=1}^{j} \overline{\langle x, e_k \rangle} \cdot \langle x, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{j} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \\ &= \|x\|_{\text{ind}}^2 - \sum_{k=1}^{j} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

4) Sei $x_j = \sum_{k=1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$. Zeige: (x_j) ist Cauchy-Folge: Für $j \geq l$ gilt

$$\|x_j - x_l\|_{\text{ind}}^2 = \left\| \sum_{k=l+1}^{j} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k \right\|_{\text{ind}} \overset{4)}{=} \sum_{k=l+1}^{j} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 < \varepsilon$$

für $j \geq l > J_\varepsilon$, da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$ konvergiert.

$\square$

4.20 Definition: Der **Abstand** zweier nichtleerer Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$d(M_1, M_2) \;:=\; \inf\big\{|x-y| : x \in M_1 \;\wedge\; y \in M_2\big\}.$$

4.21 Satz: **1)** $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\wedge\, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\wedge\, M_1 \cap M_2 = \emptyset \wedge M_1, M_2 \neq \emptyset$. Dann gilt $d(M_1, M_2) > 0$.

2) Für festes $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, ist die Abbildung

$$d_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, M) := d(\{x\}, M)$$

stetig.

Beweis: **1)** Annahme: $d(M_1, M_2) = 0$.
$\Rightarrow\; \exists (x_n)$ in M_1, (y_n) in $M_2 : |x_n - y_n| \to 0$
M_1 kompakt $\Rightarrow$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent: $x_{n_k} \to x \in M_1$ für $k \to \infty$
$|y_{n_k} - y_{n_l}| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_{n_l}| + |x_{n_l} - y_{n_l}| \to 0 \;\Rightarrow\; (y_{n_k})$ ist konvergent
M_2 abgeschlossen $\Rightarrow\; y_{n_k} \to y \in M_2$.
$\Rightarrow\; |y - x| = \lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$
$\Rightarrow\; y = x \in M_1 \cap M_2$ ↯

2) $d(\tilde{x}, M) \leq |\tilde{x} - x| + d(x, M) \;\Rightarrow\; d(\tilde{x}, M) - d(x, M) \leq |\tilde{x} - x|$
x und $\tilde{x}$ vertauscht: $\quad d(x, M) - d(\tilde{x}, M) \leq |x - \tilde{x}|$
$\Rightarrow\; \big|d(\tilde{x}, M) - d(x, M)\big| \leq |\tilde{x} - x|$. $\square$

4.22 Beispiel:
$$M_1 := \{(x,y) : y \geq \frac{1}{1+x^2}\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^2$$
$$M_1 := \{(x,y) : y \leq 0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow\; M_1 \cap M_2 = \emptyset \;\wedge\; d(M_1, M_2) = 0$$

4.23 Definition: **1)** Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt M_1 **kompakt enthalten** in M_2, geschrieben $M_1 \subset\subset M_2$, falls $M_1 \subseteq M_2$ und M_1 kompakt.

2) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{K}$. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(f) \;:=\; \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Träger oder **Support** von f.

3) Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann

$$C_0(O) \;:=\; \big\{f \in C(O \to \mathbb{K}) : \operatorname{supp}(f) \subset\subset O\big\},$$
$$C_0^\infty(O) \;:=\; \big\{f \in C^\infty(O \to \mathbb{K}) : \operatorname{supp}(f) \subset\subset O\big\}.$$

***4.24 Satz**:* Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Dann

1) $\{s : O \to \mathbb{K} \mid s$ einfach $\ \wedge\ \operatorname{supp}(s) \subset\subset O\}$ ist dicht in $L^p(O)$,

2) $C_0(O)$ ist dicht in $L^p(O)$.

Beweis: **1)** Sei $u \in L^p(O)$. O.B.d.A. $u \ge 0$.

Ziel: Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine einfache Funktion s mit $\operatorname{supp}(s) \subset\subset O$ und $\|s-u\|_p < \varepsilon$.

Setze $O_k := \left\{x \in O : |x| < k \ \wedge\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus O) > \frac{1}{k}\right\}$

(dann $O_k = B_k(0)$ falls $O = \mathbb{R}^n$),

$u_k := \chi_{O_k} \cdot u$

Dann:
- u_k ist messbar
- $\operatorname{supp}(u_k) \subseteq \overline{O_k} \subset\subset O$
- $0 \le u_k \le u$, insbespondere $\big|u(x) - u_k(x)\big|^p \le \big|u(x)\big|^p$ für $x \in O$
- $u_k \to u$, insbesondere $\big|u_k(x) - u(x)\big|^p \to 0$

Majorisierte Konvergenz: $\|u-u_k\|_p^p = \int_\Omega |u-u_k|^p \,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \to 0$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\|u-u_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach Beweis von 4.14 existiert eine einfache Funktion s mit $0 \le s \le u_k \wedge \|s-u_k\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{supp}(s) \subseteq \operatorname{supp}(u_k), \text{ also } \operatorname{supp}(s) \subset\subset O \\ \|s-u\|_p \le \|s-u_k\|_p + \|u_k - u\|_p < \varepsilon \end{cases}$$

2) Sei $u \in L^p(O)$.

Ziel: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $f \in C_0(O)$ mit $\|u-f\|_p < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Nach 1) existiert

$$s_\varepsilon = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j} \quad \text{mit } \|s_\varepsilon - u\|_p < \frac{\varepsilon}{2},\ \operatorname{supp}(s_\varepsilon) \subset\subset O,\ A_j \text{ messbar.}$$

a) O.B.d.A. $A_j \subseteq \operatorname{supp}(s_\varepsilon)$, denn

$$s_\varepsilon = \chi_{\operatorname{supp}(s_\varepsilon)} \cdot s_\varepsilon = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j \cap \operatorname{supp}(s_\varepsilon)}.$$

b) $\delta := \frac{1}{2} d(\operatorname{supp}(s_\varepsilon), \mathbb{R}^n \setminus O) > 0$, $U_\delta := \bigcup\limits_{x \in \operatorname{supp}(s_\varepsilon)} B_\delta(x)$

$\Rightarrow \overline{U}_\delta \subseteq O,\ U_\delta$ beschränkt

$\Rightarrow \overline{U}_\delta \subset\subset O$.

c) Satz 1.17: Zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ existieren $K_j \subseteq A_j \subseteq O_j$ mit

$$K_j \text{ abgeschlossen, } O_j \text{ offen, } \lambda^{(n)}(O_j \setminus K_j) < \tilde{\varepsilon}.$$

O.B.d.A. $O_j \subseteq U_\delta$, denn $A_j \subseteq O_j \cap U_\delta$ und $\lambda^{(n)}\big((O_j \cap U_\delta) \setminus K_j\big) < \tilde{\varepsilon}$.

Definiere

$$t_j(x) \;:=\; \min\Big\{1, \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus O_j)}{d(K_j, \mathbb{R}^n \setminus O_j)}\Big\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

Dann:
- $t_j \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$
- $0 \leq t_j \leq 1$
- $t_j\big|_{K_j} = 1,\ t_j\big|_{\mathbb{R}^n \setminus O_j} = 0$, insbesondere $\operatorname{supp}(t_j) \subseteq \overline{U_j}$
- $\|t_j - \chi_{A_j}\|_p^p = \displaystyle\int_O |t_j - \chi_{A_j}| \,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \leq \int_O 1 \,\mathrm{d}\lambda^{(n)} = \lambda^{(n)}(O_j \setminus K_j) < \tilde{\varepsilon}$

Setze $f(x) := \displaystyle\sum_{j=1}^k c_j t_j$. Dann

- $\operatorname{supp}(f) \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^k \operatorname{supp}(t_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^k \overline{O}_j \subseteq \overline{U}_\delta \subset\subset O \;\Rightarrow\; \operatorname{supp}(f) \subset\subset O$
- f ist stetig
- $\|f - s_\varepsilon\|_p = \Big\| \displaystyle\sum_{j=1}^k c_j(t_j - \chi_{A_j}) \Big\|_p \leq \sum_{j=1}^k |c_j| \, \|t_j - \chi_{A_j}\|_p < \Big(\sum_{j=1}^k |c_j|\Big) \tilde{\varepsilon}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}$
  für genügend kleines $\tilde{\varepsilon}$.

Insgesamt folgt $f \in C_0(O)$ und $\|f - u\|_p \leq \|f - s_\varepsilon\|_p + \|s_\varepsilon - u\| < \varepsilon$. □

4.25 Satz: Es gibt mindestens eine Funktion $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

1) $j \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und

2) $\operatorname{supp}(j) = \overline{B_1(0)}$ und

3) $\displaystyle\int_{B_1(0)} j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} j(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Beweis: Sei

$$j_1(x) \;:=\; \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{für } x \in\,]-1,1[\\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus\,]-1,1[\end{cases} .$$

Dann:
- $j_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ (nachrechnen),
- $j_1 \geq 0$ auf $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{supp}(j_1) = [-1,1]$.

Setze $j_2(x) := j_1\big(|x|^2\big)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow\; j_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}),\ j_2 \geq 0,\ \operatorname{supp}(j_2) = \overline{B_1(0)},\ \|j_2\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} j_2(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Schließlich erfüllt $j(x) := \dfrac{1}{\|j_2\|_1} j_2(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ alle behaupteten Bedingungen. □

4.26 Folgerung: Von nun an sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine fest gewählte Funktion, die 1) – 3) aus 4.25 erfüllt. Für $\varepsilon > 0$ und $j_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\, j\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$ gelten

$$j_\varepsilon \geq 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n,\ j_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{supp}\,(j_\varepsilon) = \overline{B_\varepsilon(0)},\ \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Denn mit dem Transformationssatz und $\Phi(y) = \varepsilon \cdot y$ für $y \in \mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(0) = \Phi\big(B_1(0)\big)$ und $\det\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big) = \det\begin{pmatrix} \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon^n$ folgt

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\varepsilon^n}\, j\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_x^{(n)} \ \overset{x=\varepsilon\cdot y}{=}\ \int_{B_1(0)} \frac{1}{\varepsilon^n}\, j\Big(\frac{\varepsilon y}{\varepsilon}\Big)\varepsilon^n\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} \ = \ 1.$$

4.27 Definition: Seien $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, j_ε die Funktion aus 4.26 und

$$(J_\varepsilon u)(x) \ := \ \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

[$u \in L^p(\mathbb{R}^n) \overset{2.16}{\Rightarrow} u \in L^p\big(B_1(x)\big) \overset{4.11}{\Rightarrow} u \in L^1\big(B_1(x)\big) \overset{j_\varepsilon \text{ beschränkt}}{\Rightarrow}$ Integral definiert]
J_ε heißt **Glättungsoperator** (**Mollifier**).
[Operator und lineare Abbildung stehen für das gleiche.]

4.28 Satz: Seien $1 \leq p < \infty,\ u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon > 0$. Dann gelten

1) $J_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{K})$ und

$$\big(\nabla^\alpha J_\varepsilon u\big)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \big(\nabla^\alpha j_\varepsilon\big)(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

2) $\mathrm{supp}\,(J_\varepsilon u) \subseteq \overline{U_\varepsilon}$ mit $U_\varepsilon := \bigcup_{x \in \mathrm{supp}\,(u)} B_\varepsilon(x)$. Insbesondere gilt

$$\mathrm{supp}\,(u) \text{ beschränkt} \ \Rightarrow \ J_\varepsilon u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

3) $J_\varepsilon u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|J_\varepsilon u\|_p \leq \|u\|_p$,

4) $\|J_\varepsilon u - u\|_p \to 0$ für $\varepsilon \downarrow 0$.

Beweis: **1)** $$\left|\frac{1}{h}\big(J_\varepsilon u(x+he_j) - J_\varepsilon u(x)\big) - \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_{x_j} j_\varepsilon\big)(x-y)u(y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \underbrace{\frac{1}{h}\big(j_\varepsilon(x+he_j-y) - j_\varepsilon(x-y)\big)}_{=(\partial_{x_j} j_\varepsilon)(\xi_{h,y}-y)\text{ (Mittelwertsatz Diffrechnung, } |\xi_{h,y}-x|<h} - \big(\partial_{x_j} j_\varepsilon\big)(x-y)\Big| \cdot \big|u(y)\big|\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\big|\big(\partial_{x_j} j_\varepsilon\big)(\xi_{h,y}-y) - \partial_{x_j} j_\varepsilon(x-y)\big|^q}_{<\tilde\varepsilon \text{ für } |\xi_h - x|<\delta \text{ bzw. } |h|<\delta}\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\Big)^{1/q} \|u\|_p \\
&\le \Big(\int_{B_{2\varepsilon}(x)} \tilde\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda^{(n)}\Big)^{1/q} \|u\|_p \\
&= \Big(\tilde\varepsilon(2\varepsilon)^n \lambda^{(n)}\big(B_1(0)\big)\Big)^{1/q} \|u\|_p \quad \text{für } |h| < \min\{\varepsilon,\delta\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \big(\partial_{x_j} J_\varepsilon u\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_{x_j} j_\varepsilon\big)(x-y)u(y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}.$$

Genauso für alle partiellen Ableitungen und deren Stetigkeit.

2) Es gilt $d\big(x, \operatorname{supp}(u)\big) \ge \varepsilon \ \Rightarrow\ J_\varepsilon u(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} = 0.$

3) **a)** Zeige $\big|J_\varepsilon u(x)\big| \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,\big|u(y)\big|^p\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\Big)^{1/p}$ $\qquad (*)$

Fall $p=1$: Klar

Fall $1<p<\infty$: Sei $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

$$\begin{aligned}
\big|J_\varepsilon u(x)\big| &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(j_\varepsilon(x-y)\big)^{\frac1q}\big(j_\varepsilon(x-y)\big)^{\frac1p} u(y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}}_{=1}\Big)^{1/q} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\big|u(y)\big|^p\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

b) Aus $(*)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \big|J_\varepsilon u(x)\big|^p\,\mathrm{d}\lambda_x^{(n)} &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\big|u(y)\big|^p\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_x^{(n)} \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \big|u(y)\big|^p \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_x^{(n)}}_{=1}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \|J_\varepsilon u\|_p^p \le \|u\|_p^p.$

4) Seien $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde\varepsilon > 0$ fest. Wähle $\tilde u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u-\tilde u\|_p < \dfrac{\tilde\varepsilon}{3}$ (siehe 4.24). Dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(\tilde u) \text{ kompakt} &\Rightarrow \tilde u \text{ gleichmäßig stetig auf } \operatorname{supp}(\tilde u) \\
&\Rightarrow \tilde u \text{ gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left|J_\varepsilon \tilde{u}(x) - \tilde{u}(x)\right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\big(\underbrace{\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)}_{|.|<\delta \text{ für } |x-y|<\varepsilon_\delta}\big)\,\mathrm{d}\lambda_y^{(n)}\right| \\ &\le \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \cdot \delta \\ &= \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \|J_\varepsilon \tilde{u} - \tilde{u}\|_p^p &= \int_{U_\varepsilon} \left|J_\varepsilon u(x) - u(x)\right|^p \mathrm{d}\lambda_x^{(n)} \\ &\le \delta \cdot \lambda^{(n)}(U_\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon < \varepsilon_\delta \\ &< \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}\right)^p \quad \text{für } \delta \text{ genügend klein, } \varepsilon < \varepsilon_\delta. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $\varepsilon < \varepsilon_\delta$

$$\|J_\varepsilon u - u\|_p \le \underbrace{\|J_\varepsilon u - J_\varepsilon \tilde{u}\|_p}_{\le \|u-\tilde{u}\|_p \text{ nach 3)}} + \|J_\varepsilon \tilde{u} - \tilde{u}\|_p + \|\tilde{u} - u\|_p < \tilde{\varepsilon}.$$

□

***4.29 Satz**:* Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_0^\infty(O)$ dicht in $L^p(O)$.

Beweis: Zeige: $\forall u \in L^p(O)\ \forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists g \in C_0^\infty(O) : \|u - g\|_p < \tilde{\varepsilon}$.

Seien $u \in L^p(O)$ und $\tilde{\varepsilon} > 0$ fest.

1) Wähle $\tilde{u} \in C_0(O)$ mit $\|\tilde{u} - u\|_p < \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ (4.24), setze $\tilde{u}$ fort zu

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{für } x \in O \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus O \end{cases}$$

2) $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset\subset O \ \Rightarrow\ \delta := \dfrac{1}{2} d\big(\operatorname{supp}(f), \mathbb{R}^n \setminus O\big) > 0$

$U_\delta := \bigcup_{x \in \operatorname{supp}(f)} B_\delta(x) \ \Rightarrow\ \overline{U_\delta} \subset\subset O$.

4.28 1), 2): Es gilt $J_\varepsilon f \in C^\infty(O \to \mathbb{K})$ und für $\varepsilon < \delta$ $\operatorname{supp}(J_\varepsilon f) \subseteq \overline{U}_\delta \subset\subset O$

$\Rightarrow\ J_\varepsilon f \in C_0^\infty(O)$ für $\varepsilon < \delta$.

Aus 4.28 4): Wähle $\varepsilon < \delta$ mit $\|J_\varepsilon f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

Wir haben nun: $g := J_\varepsilon f \in C_0^\infty(O)$

$$\|g - u\|_p = \|J_\varepsilon f - u\|_p \le \underbrace{\|J_\varepsilon f - f\|_p}_{\le \|J_\varepsilon f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} + \underbrace{\|f - u\|_p}_{= \|\tilde{u} - u\|_p} < \tilde{\varepsilon}.$$

□

PD. Dr. P.H. Lesky

Universität Stuttgart

Sommersemester 2016

Höhere Analysis

Teil II: Einführung in Fourieranalysis

1 Sinus-Kosinus-Reihen

1.1 Definition: Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ Hilbertraum, (e_j) Orthonormalsystem in H, $f \in H$. Dann heißt $\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \, e_j$ **Fourierreihe** von f.

Das berühmteste ONS: $H = L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$,

$$(e_j) \;=\; \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \dots\Big).$$

Fourierreihe von $f \in H$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle \, e_j \;&=\\ =\; &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(jt)\,\mathrm{d}t\;\sin(jx) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(jt)\,\mathrm{d}t\cos(jx)\Big)\end{aligned}$$

1.2 Notation:

$$\begin{aligned} a_j \;&:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(jt)\,\mathrm{d}t,\;\; j \in \mathbb{N}_0\\ b_j \;&:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(jt)\,\mathrm{d}t,\;\; j \in \mathbb{N}\\ s_k(x) \;&:=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k}\big(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\big), \quad k \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R}\\ s(x) \;&:=\; \lim_{k\to\infty} s_k(x)\end{aligned}$$

Frage: Konvergiert s_n gegen f?

1.3 Beobachtungen: **1)** s_k und gegebenfalls s sind 2π-periodisch.

2) Ist f auf $\mathbb{R}$ definiert und 2π-periodisch, so können die Integralgrenzen verschoben werden:

$$a_j \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)\cos(jt)\,\mathrm{d}t.$$

3) a_j, b_j ändern sich nicht, wenn f auf einer Nullmenge abgeändert wird.

4) Zur Definition von a_j, b_j reicht $f \in L^1\big(\,]-\pi,\pi[\,\big) \supsetneqq L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$.

***1.4 Hilfssatz**:* Für $f \in C^1\big([-\pi,\pi] \to \mathbb{K}\big)$ gilt

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \begin{matrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{matrix} \right\} \mathrm{d}t \;=\; 0. \qquad (*)$$

Beweis: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \;\to\; 0$ für $\omega \to \infty$. □

***1.5 Lemma von Riemann**:* Für $f \in L^1\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$ gilt $(*)$.

Beweis: Sei $f \in L^1\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$. Zeige:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \omega_\varepsilon > 0 \;\forall \omega > \omega_\varepsilon : \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \Big| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wähle $f_\varepsilon \in C_0^\infty\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (siehe 4.29). Dann

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \Big| \;&\le\; \underbrace{\Big| \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - f_\varepsilon(t)\big)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \Big|}_{\le \|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon/2} + \underbrace{\Big| \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \Big|}_{<\varepsilon/2 \text{ für } \omega > \omega_\varepsilon \text{ nach 1.4}} \\ &<\; \varepsilon \quad \text{für } \omega > \omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

□

***1.6 Hilfssatz**:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodisch, $f \in L^1\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$. Dann

$$s_k(x) - f(x) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big) \frac{\sin\big((k+\frac{1}{2})t\big)}{2\pi\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\,\mathrm{d}t \quad \text{für } k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: **1)**

$$\begin{aligned} s_k(x) \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\underbrace{\big(\cos(jt)\cos(jx) + \sin(jt)\sin(jx)\big)}_{=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} + \mathrm{e}^{\ \mathrm{i}jt}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt})}\,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{j=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j(x-t)} \Big)}_{=:D_k(x-t)\text{ (Dirichlet-Kern)}} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 2\pi D_k(\xi) \;&=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} \sum_{j=0}^{2k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\xi} \\ &=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} \frac{1 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})^{2k+1}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}} \\ &=\; \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\xi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2}} \\ &=\; \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi/2}} \\ &=\; \frac{-2\mathrm{i}\sin\big(\big(k+\frac{1}{2}\big)\xi\big)}{-2\mathrm{i}\sin\big(\frac{1}{2}\xi\big)} \\ \Rightarrow\; D_k(\xi) \;&=\; \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\big(\big(k+\frac{1}{2}\big)\xi\big)}{\sin\big(\frac{1}{2}\xi\big)} \;=\; D(-\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ s_k(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{D_k(x-t)}_{=D_k(t-x)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{s=t-x}{=} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)D_k(s)\,\mathrm{d}s \\
&\overset{f,D_k\ 2\pi\text{-periodisch}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)D_k(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

3) Speziell $f=1$ auf $\mathbb{R} \ \Rightarrow\ a_0=2,\ a_j=b_j=0$ für $j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 1 &= s_k(x) \overset{2)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(s)\,\mathrm{d}s \\
\Rightarrow\ f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_k(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

2) $\wedge$ 3) $\Rightarrow\ s_k(x)-f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\big(f(s+x)-f(x)\big)D_k(s)\,\mathrm{d}s.$ $\square$

***1.7 Kriterium von Dini**:* Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ 2π-periodisch und $f\in L^1\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$. Für jedes $x_0\in\mathbb{R}$ gilt

$$\exists\delta>0:\int_{-\delta}^{\delta}\Big|\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t<\infty\ \Rightarrow\ f(x_0)=\lim_{k\to\infty}s_k(x_0).$$

Beweis: $s_k(x)-f(x) \overset{1.6}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big)\,\mathrm{d}t$

$\overset{1.5}{\to}\ 0$ für $k\to\infty$. $\square$

***1.8 Folgerung**:* Sei f wie in 1.7, $x_0\in\mathbb{R}$. Falls f in x_0 **hölderstetig** ist, d.h.

$$\exists\delta,\alpha,c>0:\big|f(x)-f(x_0)\big|\le c|x-x_0|^\alpha \quad \text{für } |x-x_0|<\delta,$$

so folgt

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Big|\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t \ \le\ \int_{-\delta}^{\delta}c|t|^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t<\infty$$

und somit $f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty}s_k(x_0)$.

***1.9 Erweitertes Kriterium von Dini**:* Sei f wie in 1.7. Für jedes $x_0\in\mathbb{R}$ gilt: Falls x_0 Unstetigkeitsstelle 1. Art ist (d.h. $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ existieren) und

$$\exists\delta>0:\int_0^{\delta}\Big|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t<\infty\ \wedge\ \int_{-\delta}^{0}\Big|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t<\infty,$$

dann folgt $s(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Beweis: $D_k(\xi) = D_k(-\xi) \ \wedge \ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,\mathrm{d}t = 1 \ \Rightarrow \ \int_{-\pi}^{0} D_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} D_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \ \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \ = \ \int_{-\pi}^{0} D_k(t) f(x_0-0)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} D_k(t) f(x_0+0)\,\mathrm{d}t$$

Beweis von 1.6: $s_k(x_0) \ = \ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D(t)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ & s_k(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \\ = \ & \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0-0)}{t}\, tD_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\, tD_k(t)\,\mathrm{d}t \\ \stackrel{\text{Beweis 1.7}}{\longrightarrow} \ & 0 \quad \text{für } k \to \infty. \end{aligned}$$

□

***1.10 Kriterium von Lipschitz**:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sei 2π-periodisch und hölderstetig:

$$\exists \alpha, c > 0 \ \forall x, x' \in \mathbb{R} : \big|f(x) - f(x')\big| \leq c|x - x'|^{\alpha}.$$

Dann konvergiert (s_k) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

Beweis: **1)** Zutaten: Es gelten

a) $\forall x \in \mathbb{R} : s_k(x) \to f(x)$ nach 1.8.

b) (s_k) ist gleichgradig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{N} : \big(|x - x'| < \delta \Rightarrow \big|s_k(x) - s_k(x')\big| < \varepsilon\big)$$

(Beweis siehe unten).

c) f ist stetig.

2) Mischen: Für festes $x_0 \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$ wähle

a) $K_{x_0} \in \mathbb{N}$ mit $\forall k > K_{x_0} : \big|s_k(x_0) - f(x_0)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3}$,

b) $\delta > 0$ mit $\big|s_k(x_0) - s_k(x)\big|, \big|f(x_0) - f(x)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ für $|x - x_0| < \delta$, $k \in \mathbb{N}$.

Für $k > K_{x_0}$ und $x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$ folgt

$$\big|s_k(x) - f(x)\big| \ \leq \ \big|s_k(x) - s_k(x_0)\big| + \big|s_k(x_0) - f(x_0)\big| + \big|f(x_0) - f(x)\big| \ < \ \varepsilon.$$

3) Backen: $[-\pi,\pi]$ ist kompakt, also gibt es endlich viele $x_1,\ldots,x_J$, so dass

$$[-\pi,\pi] \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{J} \,]x_j-\delta_j, x_j+\delta_j[\,.$$

Für $k > \max\{K_{x_1},\ldots,K_{x_J}\}$ folgt

$$\big|s_k(x)-f(x)\big| < 3\varepsilon \text{ für } x\in[-\pi,\pi] \overset{s_k,f\ 2\pi\text{-periodisch}}{\Rightarrow} \big|s_k(x)-f(x)\big| < 3\varepsilon \text{ für } x\in\mathbb{R}.$$

Beweis von 1b): Sei $\varepsilon>0$ beliebig, aber fest. Wähle $\tau>0$, so dass

$$\int_{-\tau}^{\tau}\frac{c\,|t|^\alpha}{2\pi\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\,\mathrm{d}t \;<\; \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{mit } c,\alpha \text{ aus Voraussetzung}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \big|s_k(x)-s_k(x')\big| \;&\le\; \big|\big(s_k(x)-f(x)\big)-\big(s_k(x')-f(x')\big)\big| + \big|f(x)-f(x')\big| \\
&\overset{1.6}{=}\; \Big|\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)D_k(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x'+t)-f(x')\big)D_k(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\quad + \big|f(x)-f(x')\big| \\
&\le\; \int_{-\tau}^{\tau}\underbrace{\big|f(x+t)-f(x)\big|}_{\le c|t|^\alpha}\big|D_k(t)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{-\tau}^{\tau}\big|f(x'+t)-f(x')\big|\,\big|D_k(t)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{[-\pi,\pi]\setminus\,]-\tau,\tau[}\Big(\underbrace{\big|f(x+t)-f(x'+t)\big|}_{\le c|x-x'|^\alpha} + \big|f(x)-f(x')\big|\Big)\,\big|D_k(t)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \big|f(x)-f(x')\big| \\
&\le\; \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+2c|x-x'|^\alpha\underbrace{\int_{[-\pi,\pi]\setminus\,]-\tau,\tau[}\big|D_k(t)\big|\,\mathrm{d}t}_{<\infty} + c|x-x'|^\alpha \\
&<\; \varepsilon \quad \text{für } |x-x'|<\delta.
\end{aligned}$$

□

1.11 Bemerkung: $f\in C^1(\mathbb{R}\to\mathbb{K})$ 2π-periodisch $\Rightarrow$ f erfüllt Kriterium von Lipschitz:

$$\big|f(x)-f(x')\big| \;=\; \big|f'(\xi)\big|\cdot|x-x'| \;\le\; \max_{[-\pi,\pi]}|f'|\cdot|x-x'|.$$

1.12 Komplexe Darstellung von Fourierreihen: Aus Beweis von 1.6:

$$s_k(x) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{j=-k}^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(x-t)}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \sum_{j=-k}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}.$$

Neue Interpretation: $u_j(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} \;\Rightarrow\; s_k(x) = \sum_{j=-k}^{k}\langle f,u_j\rangle\,u_j(x)$.

Wegen

$$\langle u_j, u_k\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}_{=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}}\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ \dfrac{1}{2\pi(j-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} = 0, & \text{für } j\neq k \end{cases}$$

ist (u_j) ein ONS in $L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$. Beachte

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\langle f,u_j\rangle\,u_j(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{k}\big(a_j\cos(jx)+b_j\sin(jx)\big)\Big) = f(x).$$

1.13 Satz: $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ist ein **vollständiges** ONS in $L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$, d.h. $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ist ONS und

$$\forall f\in L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big) : f = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=-k}^{k}\langle f,u_j\rangle\,u_j$$

Beweis: Sei $f\in L^2\big(]-\pi,\pi[\big)$ fest. Zeige: $\forall\varepsilon>0\;\exists K_\varepsilon\in\mathbb{N}\;\forall k>K_\varepsilon : \Big\|f-\sum_{j=-k}^{k}\langle f,u_j\rangle\,u_j\Big\|_2<\varepsilon.$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig, aber fest.

1) Wähle $f_\varepsilon\in C_0^\infty\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$ mit $\|f-f_\varepsilon\|_2<\dfrac{\varepsilon}{3}$ (vgl. Teil I, 4.29).
Setze f_ε 2π-periodisch fort auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathbb{K})$.

2) Sei $\tilde{s}_k(x) := \sum_{j=-k}^{k}\langle f_\varepsilon,u_j\rangle\,u_j(x)$. Nach 1.10 mit 1.11:

$$\exists K_\varepsilon\in\mathbb{N}\;\forall k>K_\varepsilon\;\forall x\in\mathbb{R} : \big|\tilde{s}_k(x)-f_\varepsilon(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow\; \|\tilde{s}_k-f_\varepsilon\|_2^2 \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\big|\tilde{s}_k(t)-f_\varepsilon(t)\big|^2\,\mathrm{d}t \;\le\; \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi}\,\mathrm{d}t \;=\; \Big(\frac{\varepsilon}{3}\Big)^2.$$

3) $\tilde{s}_k - s_k \;=\; \sum_{j=-k}^{k}\big(\langle f_\varepsilon,u_j\rangle\,u_j - \langle f,u_j\rangle\,u_j\big) \;=\; \sum_{j=-k}^{k}\langle f_\varepsilon - f,u_j\rangle\,u_j$

$$\Rightarrow\; \|\tilde{s}-s\|_2^2 \underset{\text{Gleichung 4.19}}{\overset{\text{Parsevalsche}}{=}} \sum_{j=-k}^{k}\big|\,\langle f_\varepsilon-f,u_j\rangle\,\big|^2 \underset{\text{Ungleichung 4.19}}{\overset{\text{Besselsche}}{\le}} \|f_\varepsilon-f\|_2^2.$$

1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow$ $\forall k>K_\varepsilon : \|f-s_k\| \le \underbrace{\|f-f_\varepsilon\|_2}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|f_\varepsilon-\tilde{s}_k\|_2}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|\tilde{s}_k-s_k\|_2}_{\le\|f-f_\varepsilon\|_2<\varepsilon/3} < \varepsilon.$

□

1.14 Bemerkungen: **1)** Für

$$(e_j) \;=\; \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots\Big)$$

folgt aus 1.13: $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist vollständiges ONS in $L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big)$.

2) Zusammenfassung:

a) $f \in L^2\big(\,]-\pi,\pi[\,\big) \;\Rightarrow\; f = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=-k}^{k} \langle f, u_j\rangle\, u_j$, Konvergenz bezüglich $\|.\|_2$.

b) f erfüllt Dini in jedem $x \in [-\pi,\pi[\; \Rightarrow\; f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f, u_j\rangle\, u_j(x)$ punktweise.

c) f erfüllt Lipschitz-Kriterium $\;\Rightarrow\; f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \langle f, u_j\rangle\, u_j(x)$ gleichmäßig.

1.15 Andere Intervalle: Seien $L>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ $2L$-periodisch und hölderstetig:

$$\exists \alpha, c>0\ \forall x,x'\in\mathbb{R}: \big|f(x)-f(x')\big| \le c|x-x'|^\alpha.$$

Definiere $g(x) := f\Big(\dfrac{Lx}{\pi}\Big) \;\Rightarrow\; g$ erfüllt das Kriterium von Lipschitz 1.10.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ f\Big(\frac{Lx}{\pi}\Big) \quad &= \quad g(x) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} f\Big(\frac{Lt}{\pi}\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} \\ &\overset{s=Lt/\pi}{\underset{\mathrm{d}t=\frac{\pi}{L}\,\mathrm{d}s}{=}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi s/L} f(s)\frac{\pi}{L}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\end{aligned}$$

Mit $y := \dfrac{Lx}{\pi}$ bzw. $x = \dfrac{\pi y}{L}$: $\;f(y) \;=\; \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi s/L} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi y/L}$

Setze $\tilde{u}_j(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi x/L} \;\Rightarrow\; (\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ist vollständiges ONS in $L^2\big(\,]-L,L[\,\big)$.

1.16 Beispiel: Gegeben: $L>0; a,b\in\mathbb{R}; b\ge 0; f:[-L,L]\to\mathbb{C}$.
Gesucht: $y \in C^2\big([-L,L]\to\mathbb{C}\big)$ mit

$$\left.\begin{aligned} -y''+ay'+by \;&=\; f \\ y(-L)=y(L)\ \wedge\ y'(-L)=y'(L) &\quad \text{(periodische Randbedingungen)}\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Lösung: $y(x) \;=\; \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\big(\frac{j\pi}{2}\big)^2 + \frac{\mathrm{i}j\pi}{2}a + b}\,\langle f,\tilde{u}_j\rangle\tilde{u}_j(x).$

2 Fouriertransformation

2.1 Definition: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ und $j, k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\|f\|_{j,k} \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^j f^{(k)}(x)\right|$$

(im Fall $k \geq 1$ ist $\|.\|_{j,k}$ eine Halbnorm). Der **Schwartz-Raum** über $\mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \;:=\; \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall j, k \in \mathbb{N}_0 : \|f\|_{j,k} < \infty\right\}.$$

Offensichtlich: $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.2 Beispiele: **1)** $f(x) = x^j \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0 \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R})$.

2) Abschneidefunktion: Für $R > 0$, $0 < \varepsilon < R$ setze

$$\psi_{R,\varepsilon}(x) \;:=\; \int_{-R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \;=\; J_\varepsilon(\chi_{[-R-\varepsilon,R+\varepsilon]}).$$

$$\Rightarrow\; \psi_{R,\varepsilon}(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & |x| \leq R \\ \in\,]0,1[& R < |x| < R + 2\varepsilon \\ 0 & |x| \geq R + 2\varepsilon \end{cases}$$

Außerdem

$$\left|\psi'_{R,\varepsilon}(x)\right| \;\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} \left|j'_\varepsilon(x-y)\right|\mathrm{d}y \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} j'_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \;=\; c,$$

genauso $\left|\psi''_{R,\varepsilon}(x)\right| \leq d$ unabhängig von R.

2.3 Bemerkung: Mit

$$d(f,g) \;:=\; \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+k}} \frac{\|f-g\|_{j,k}}{1 + \|f-g\|_{j,k}}$$

bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ einen vollständigen Raum.

2.4 Eigenschaften: **1)** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist linearer Raum.

2) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist Algebra ohne Einselement).

3) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\; j, k \in \mathbb{N}_0,\; g(x) = \dfrac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\big(x^k f(x)\big) \;\Rightarrow\; g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big(1 + |x|^2\big)\big|f(x)\big| \leq \|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0} =: c_f \;\Rightarrow\; \big|f(x)\big| \leq \dfrac{c_f}{1+x^2}$.

***2.5 Definition**:* Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \omega \mapsto \hat{f}(\omega) := f^\wedge(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

die **Fouriertransformierte** von f.

***2.6 Beispiel**:* $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \;\Rightarrow\; \hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$.

***2.7 Satz**:* Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $j, k \in \mathbb{N}_0$ gelten

1) $\widehat{f^{(j)}}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^j \hat{f}(\omega)$,

2) $g(x) := x^k f(x) \;\Rightarrow\; \hat{g}(\omega) = \mathrm{i}^k \hat{f}^{(k)}(\omega)$,

3) $h(x) := \dfrac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\big(x^k f(x)\big) \;\Rightarrow\; \hat{h}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^j \hat{g}(\omega) = \mathrm{i}^{j+k}\omega^j \hat{f}^{(k)}$.

Beweis: **1)**

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\omega \hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} g(x) = x \cdot f(x) \;\Rightarrow\; \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

Vertauschen von Integral und Ableitung: Integral konvergiert gleichmäßig bezüglich ω:

$$\Big|\int_R^\infty f(x)x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| \;\le\; \int_R^\infty \big|f(x)x\big|\,\mathrm{d}x \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } R > R_\varepsilon \text{ unabhängig von } \omega.$$

$\square$

***2.8 Satz und Definition**:* $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und heißt **Fouriertransformation**.

Beweis: **1)** $\mathcal{F}$ linear ✓

2) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

a) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$: siehe Beweis von 2.7

b) $\sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \big|\hat{f}(\omega)\big| = \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \Big| \le \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty$

c) $\sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \big|\omega^j \hat{f}^{(k)}(\omega)\big| \overset{2.7}{=} \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \Big| \underbrace{\Big(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\big(x^k f(x)\big)\Big)^\wedge}_{\in\mathcal{S}(\mathbb{R})} \Big| \overset{b)}{<} \infty.$

□

2.9 Bemerkung: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bezüglich d aus 2.3 stetig.

2.10 Satz: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bijektiv, und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) : g \mapsto \check{g},\ \check{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Beweis: **1)** Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Zeige $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$:

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\operatorname{supp}(f) \subseteq \Big]\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\Big[$, setze f $\frac{2}{\varepsilon}$-periodisch fort.
Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{1.15}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi s/(1/\varepsilon)} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi x/(1/\varepsilon)} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi\varepsilon s} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi\varepsilon x} \\
&\overset{\omega_j := j\pi\varepsilon}{=} \sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \hat{f}(\omega_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \underbrace{\pi\varepsilon}_{=\Delta\omega_j} \hat{f}(\omega_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j x} \\
&\underset{\text{Riemann-Summe}}{\overset{\varepsilon\downarrow 0}{\to}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Beachte: $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \big|\hat{f}(\omega)\big| \le \frac{c}{\omega^2+1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_R^\infty \big|\hat{f}(\omega)\big|\,\mathrm{d}\omega \;<\; \delta \quad \text{für } R > R_\delta \\ \displaystyle\sum_{j\ge 1+R/\pi\varepsilon} \pi\varepsilon\big|\hat{f}(\omega_j)\big| \;\le\; \pi\varepsilon \sum_{j\ge 1+R/\pi\varepsilon} \frac{c}{\omega_j^2} \;=\; \frac{c}{\pi\varepsilon} \sum_{j\ge 1+R/\pi\varepsilon} \frac{1}{j^2} \\ \displaystyle\qquad\qquad \le\; \frac{c}{\pi\varepsilon} \sum_{j\ge 1+R/\pi\varepsilon} \frac{1}{j(j-1)} \le \frac{c}{\pi\varepsilon}\frac{1}{\frac{R}{\pi\varepsilon}} < \delta \text{ für } R > R_\delta \end{cases}$$

2) Sei nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Multipliziere mit $\psi_{R,1}$ aus 2.2

a) Für $|x| \leq R$: $f(x) \;=\; \big(\psi_{R,1} \cdot f\big)(x) \;\overset{1)}{=}\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}\omega$

b) $\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}(\omega) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big(\psi_{R,1} \cdot f\big)(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x \;\overset{R\to\infty}{\to}\; \hat{f}(\omega)$ für jedes feste $\omega \in \mathbb{R}$, denn:

- $\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \to f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$ punktweise,
- $\big|\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\big| \leq \big|f(x)\big|$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\, \mathrm{d}x < \infty$,
- majorisierte Konvergenz.

c)
$$\begin{aligned}
\big|\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}(\omega)\big| \;&\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\, \mathrm{d}x \;=:\; c_1 \\
\big|\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}(\omega)\big| \;&\leq\; \Big|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\psi_{R,1} \cdot f\big)''(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x\Big| \;\leq\; \frac{c_2}{\omega^2} \\
\Rightarrow\; \big|\big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}\big| \;&\leq\; g(\omega) \;:=\; \min\Big\{c_1, \frac{c_2}{\omega^2}\Big\} \text{ unabhängig von } R
\end{aligned}$$

b) $\wedge$ c) $\overset{\text{majorisierte}}{\underset{\text{Konvergenz}}{\Rightarrow}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big(\psi_{R,1} \cdot f\big)^{\wedge}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x \;\overset{R\to\infty}{\to}\; \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}\omega$

$\overset{a)}{\Rightarrow}\; f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}\omega$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere ist $\mathcal{F}$ injektiv: $\hat{f} = \hat{g} \;\Rightarrow\; f = g$.

3) $\mathcal{F}$ ist surjektiv: Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nach 2):

$$\begin{aligned}
g(\omega) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x \\
&\overset{y:=-x}{=}\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(-y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$h(y) := \hat{g}(-y) \;\Rightarrow\; h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\wedge\; g = \hat{h} \in \mathrm{Bild}(\mathcal{F})$ □

***2.11 Plancherel-Gleichung**:* Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Beweis: **1)** Zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp}(f) \subseteq \big]-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\big[$

Parsevalsche Gleichung in $L^2\Big(\big]-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\big[\Big)$ mit $\tilde{u}_j(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi\varepsilon x}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;&=\; \|f\|_{L^2(]-\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon}[)} \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big|\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi\varepsilon t}\, \mathrm{d}t\Big|^2 \\
&=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\pi}_{\Delta\omega_j} \big|\hat{f}(\underbrace{j\pi\varepsilon}_{\omega_j})\big|^2 \\
&\overset{\varepsilon\downarrow 0}{\to}\; \int_{-\infty}^{\infty} \big|\hat{f}(\omega)\big|^2\, \mathrm{d}\omega \;=\; \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

2) Genauso wie Beweis von 2.10: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;=\; \lim_{R\to\infty} \|\psi_{R,1}\cdot f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;\stackrel{1)}{=}\; \lim_{R\to\infty} \left\|\big(\psi_{R,1}\cdot f\big)^\wedge\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;=\; \|\hat f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

□

***2.12 Folgerung**:* Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \hat f, \hat g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$.

Beweis: Polarisation:

$$\langle f, g\rangle \;=\; \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + \mathrm{i}\big(\|f+\mathrm{i}g\|^2 - \|f-\mathrm{i}g\|^2\big)\right).$$

□

***2.13 Definition**:* Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$f * g(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

die **Faltung** von f und g.

***2.14 Beispiel**:*

$$\begin{aligned}\psi_{R,\varepsilon}(x) &= \int_{-R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} j_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-y)\chi_{[-R-\varepsilon,R+\varepsilon]}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= j_\varepsilon * \chi_{[-R-\varepsilon,R+\varepsilon]}(x).\end{aligned}$$

***2.15 Satz**:* Für $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gelten

1) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

2) $\widehat{f\cdot g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\hat f * \hat g$, $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\,\hat f\cdot\hat g$,

3) $(f*g)*h = f*(g*h)$, $f*g = g*f$.

Beweis: **2)**

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\widehat{f\cdot g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left\langle g, \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot} f}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\stackrel{2.12}{=} \left\langle \hat g, \big(\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot} f}\big)^\wedge\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat g(\tilde\omega)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\overline{f}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde\omega x}\,\mathrm{d}x\Big)}\,\mathrm{d}\tilde\omega \\ &= \hat f * \hat g(\omega).\end{aligned}$$

Genauso: $\sqrt{2\pi}(\hat f\cdot\hat g)^\vee = f * g \;\Rightarrow\; \widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\,\hat f\cdot\hat g$.

1) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{2.8}{\Rightarrow} \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \hat{f} \cdot \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$\overset{2.10}{\Rightarrow} f * g \overset{2)}{=} \sqrt{2\pi}(\hat{f} \cdot \hat{g})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) $(f * g) * h \overset{1)}{=} \sqrt{2\pi}\big(\widehat{f * g} \cdot \hat{h}\big)^\vee \overset{1)}{=} 2\pi\big(\hat{f} \cdot \hat{g} \cdot \hat{h}\big)^\vee$.

□

***2.16 Beispiel**:* Durchbiegung eines unendlich langen Balkens:

$$u^{(4)}(x) + \alpha^4 u(x) \;=\; f(x), \quad u(x) \to 0 \text{ für } x \to \pm\infty$$

($\alpha > 0$). Annahme: $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann automatisch $u(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.
Fouriertransformation auf die Differentialgleichung anwenden:

$$(\mathrm{i}\omega)^4 \hat{u}(\omega) + \alpha^4 \hat{u}(\omega) \;=\; \hat{f}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(\omega) \;=\; \frac{1}{\alpha^4 + \omega^4}\hat{f}(\omega)$$

denn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{(.)^4 + \alpha^4}\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Setze $g(\omega) := \dfrac{1}{\omega^4 + \alpha^4}$

$$\Rightarrow\; u \;=\; \big(g \cdot \hat{f}\big)^\vee \;=\; \big(\widehat{(\check{g})} \cdot \hat{f}\big)^\vee \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\check{g} * f$$
$$\Rightarrow\; u(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \check{g}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

***2.17 Satz**:* Sei $\mathcal{F}_{1,\infty} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) : f \mapsto \hat{f}$ mit $\hat{f}(\omega) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$. Dann

1) $\|\hat{f}\|_\infty \le \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_1$,

2) $\mathcal{F}_{1,\infty}$ ist linear und stetig,

3) $\mathcal{F}_{1,\infty}$ ist die einzige Fortsetzung von $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einer stetigen Abbildung $L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$.

Beweis: **1)** $\big|\hat{f}(\omega)\big| \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| \;\le\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big|f(x)\big| \cdot 1\,\mathrm{d}x \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.

2) $\mathcal{F}_{1,\infty}$ linear ✓
Stetigkeit: $\big\|\mathcal{F}_{1,\infty}(f) - \mathcal{F}_{1,\infty}(g)\big\|_\infty \;=\; \big\|\mathcal{F}_{1,\infty}(f-g)\|_\infty \;\le\; \|f-g\|_1$.

3) Offensichtlich: $\mathcal{F}_{1,\infty}(f) = \mathcal{F}(f)$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Sei $\mathcal{G} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ stetig und Fortsetzung von $\mathcal{F}$.
Zu $f \in L^1(\mathbb{R})$ wähle (f_j) in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f_j - f\|_1 \to 0$ (siehe 4.29)

$$\Rightarrow\; \mathcal{G}(f) \;=\; \lim_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j) \;=\; \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(f_j) \;=\; \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}_{1,\infty}(f_j) \;=\; \mathcal{F}_{1,\infty}(f).$$

□

2.18 Satz: $\mathrm{Bild}(\mathcal{F}_{1,\infty}) \subseteq \big\{ f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) : f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty \big\}$.

Beweis: $f \in \mathrm{Bild}(\mathcal{F}_{1,\infty}) \;\Leftrightarrow\; \exists g \in L^1(\mathbb{R}) : f = \hat{g}$.

1)
$$\begin{aligned}
\big|f(\omega+h) - f(\omega)\big| &= \big|\hat{g}(\omega+h) - \hat{g}(\omega)\big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+h)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\big)\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} \big|g(x)\big|\,\big|\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+h)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}_{=\mathrm{i}h(-\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\omega}x}}\big|\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \underbrace{+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-R} \big|g(x)\big|\cdot 2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}^{\infty} \big|g(x)\big|\cdot 2\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } R \ge R_\varepsilon \text{ da } f \in L^1(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \big|g(x)\big|\cdot|h|\cdot|x|\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}}\cdot R_\varepsilon \cdot \|g\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon \quad \text{für } |h| < \delta_\varepsilon.
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
\big|f(\omega)\big| &= \big|\hat{g}(\omega)\big| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-R}^{R} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-R}\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}^{\infty}\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } R \ge R_\varepsilon \text{ da } f \in L^1(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\underbrace{\int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x}_{\to 0 \text{ für } \omega \to \infty \text{ (Riemannsches Lemma 1.5)}}\Big| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon \quad \text{für } \omega > \omega_\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

2.19 Umkehrsatz: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, und es gelte die Dini-Bedingung:

$$\exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} \Big|\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}\Big|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dann folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{1,\infty}(f)(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}\,\mathrm{d}\omega \;=\; f(x_0),$$

wobei das Integral als uneigentliches Riemann-Integral konvergent ist.

Ohne Beweis

***2.20 Satz von Plancherel**:* Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen linearen Abbildung $\mathcal{F}_{2,2}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Weiter gelten:

1) $\mathcal{F}_{2,2}$ ist isometrisch, d.h. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}): \big\|\mathcal{F}_{2,2}(f)\big\|_2 = \|f\|_2$ bzw.

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}): \big\langle \mathcal{F}_{2,2}(f), \mathcal{F}_{2,2}(g)\big\rangle = \langle f, g\rangle\,.$$

2) $\mathcal{F}_{2,2}$ ist bijektiv. Mit 1): $\mathcal{F}_{2,2}$ ist unitär.

3) $\mathcal{F}_{2,2}^{-1}$ ist die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{F}^{-1}$ zu einer stetigen Abbildung $\mathcal{G}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Beweis: Aus 2.11: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}): \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

a) Definition von $\mathcal{F}_{2,2}(f)$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$:
Wähle (f_j) in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f_j - f\|_2 \to 0$

$\Rightarrow$ (f_j) ist Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R})$

$\overset{\|\hat{f}_j - \hat{f}_k\|_2 = \|f_j - f_k\|_2}{\Rightarrow}$ $(\hat{f}_j)$ ist Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R})$

$\overset{L^2(\mathbb{R}) \text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ $(\hat{f}_j)$ ist konvergent. Setze $\mathcal{F}_{2,2}(f) := \lim\limits_{j\to\infty} \hat{f}_j$.

$\mathcal{F}_{2,2}(f)$ ist wohldefiniert: Ist $(\tilde{f}_j)$ weitere Folge mit $\|\tilde{f}_j - f\|_2 \to 0$, so folgt

$$\|\widehat{\tilde{f}}_j - \hat{f}_j\|_2 = \|\tilde{f}_j - f_j\|_2 \to 0, \text{ also } \lim_{j\to\infty} \widehat{\tilde{f}}_j = \lim_{j\to\infty} \hat{f}_j.$$

b) Eigenschaften von $\mathcal{F}_{2,2}$:

- Linearität: $\mathcal{F}_{2,2}(\alpha f + \beta g) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{F}(\alpha f_j + \beta g_j) = \alpha \mathcal{F}_{2,2}(f) + \beta \mathcal{F}_{2,2}(g)$.
- Isometrie: $\|\mathcal{F}_{2,2}(f)\|_2 = \lim\limits_{j\to\infty} \|\hat{f}_j\|_2 = \lim\limits_{j\to\infty} \|f_j\|_2 = \|f\|_2$.
- Stetigkeit: $\|\mathcal{F}_{2,2}(f) - \mathcal{F}_{2,2}(g)\|_2 = \|\mathcal{F}_{2,2}(f-g)\|_2 = \|f-g\|_2$.
- Injektivität folgt aus Isometrie.

c) Eindeutigekeit: Sei $\mathcal{H}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ stetig und Fortseztung von $\mathcal{F}$.
Zeige: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}): \mathcal{H}(f) = \mathcal{F}_{2,2}(f)$.

Zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ wähle (f_j) in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f_j - f\|_2 \to 0$.

$$\Rightarrow\ \mathcal{H}(f) \overset{\mathcal{H}\text{ stetig}}{=} \lim_{j\to\infty} \underbrace{\mathcal{H}(f_j)}_{=\mathcal{F}(f_j) = \mathcal{F}_{2,2}(f_j) \text{ da } \mathcal{H}, \mathcal{F}_{2,2} \text{ Fortsetzungen von } \mathcal{F}} = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}_{2,2}(f) \overset{\mathcal{F}_{2,2}\text{ stetig}}{=} \mathcal{F}_{2,2}(f).$$

d) Wende a) – c) auf $\mathcal{F}^{-1}$ an
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}^{-1}$ besitzt eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung $\mathcal{G}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und (f_j) in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|f_j - f\|_2 \to 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{G}(f) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{F}^{-1}(f_j)$

$\Rightarrow\ \mathcal{F}_{2,2}\big(\mathcal{G}(f)\big) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{F}_{2,2}\big(\mathcal{F}^{-1}(f_j)\big) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$

$\Rightarrow\ f \in \mathrm{Bild}(\mathcal{F}_{2,2}) \ \wedge\ \mathcal{F}_{2,2} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}$. Insbesondere ist $\mathcal{F}_{2,2}$ surjektiv
Nun ist $\mathcal{F}_{2,2}$ bijektiv $\Rightarrow\ \mathcal{F}_{2,2}^{-1} = \mathcal{G}$.

$\square$

***2.21 Achtung:*:** Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$ eventuell nicht definiert.

***2.22 Satz**:* Für $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt $\mathcal{F}_{2,2}(f) = \mathcal{F}_{1,\infty}(f)$.

Ohne Beweis

***2.23 Satz**:* Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt $\mathcal{F}_{2,2}(f) = L^2\text{-}\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$.

Beweis: Betrachte $f_R := \chi_{[-R,R]} \cdot f$.
$\Rightarrow\ f_R \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f_R(x)\big|\,\mathrm{d}x \ = \ \int_{-R}^{R} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \ \overset{\text{CSB}}{\leq} \ \Big(\int_{-R}^{R} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_{-R}^{R} 1\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \ < \ \infty$$

$\overset{2.22}{\Rightarrow}\ \mathcal{F}_{2,2}(f_R)(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$.
Schließlich $\|f - f_R\|_2 \to 0 \ \Rightarrow\ \big\|\mathcal{F}_{2,2}(f) - \mathcal{F}_{2,2}(f_R)\big\|_2 \to 0$ für $R \to \infty$. $\square$

***2.24 Erinnerung**:* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt **Multiindex**. Dafür:

- $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
- $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ für $x \in \mathbb{R}^n$,
- $\nabla^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$, z.B. $n = 3$, $\alpha = (1,0,2)$, $\nabla^{(1,0,2)} = \dfrac{\partial^3}{\partial_{x_1} \cdot \partial_{x_3}^2}$,
- Für $\lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$: $(\lambda x)^\alpha = \lambda^{|\alpha|} x^\alpha$,
- Leibnitz-Regel: Für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

  $$\nabla^\alpha(f \cdot g) \ = \ \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\nabla^\beta f\big)\big(\nabla^{\alpha-\beta} g\big),$$

  wobei $\beta \leq \alpha :\Leftrightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ \beta_n \leq \alpha_n$ und $\dbinom{\alpha}{\beta} := \dbinom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \dbinom{\alpha_n}{\beta_n}$.

***2.25 Definition**:* **1)** Der Schwartz-Raum:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) \ \Big|\ \forall j \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \|f\|_{j,\alpha} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^j \cdot \big|\nabla^\alpha f(x)\big| < \infty \Big\}.$$

2) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\hat{f}(\omega) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \cdot x} \,\mathrm{d}x \quad (\omega \cdot x := \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)$$

die **Fouriertransformierte** von f.

3) Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt **Fouriertransformation.**

4) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$f * g(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y$$

die **Faltung** von f und g.

2.26 Satz: **1)** $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist linear, bijektiv, und es gilt $\mathcal{F}^{-1}(g) = \check{g}$ mit

$$\check{g}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \cdot x} \,\mathrm{d}\omega \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

2) Plancherel-Gleichung: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

3) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gelten

a) $\widehat{\nabla^\alpha f}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) = \mathrm{i}^{|\alpha|} \omega^\alpha \hat{f}(\omega)$,

b) $\widehat{x^\alpha f} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \nabla^\alpha \hat{f}$,

c) $\widehat{f \cdot g} = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f} * \hat{g}$.

d) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

2.27 Fortsetzungen: **1)** $\mathcal{F}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen und linearen Abbildung $\mathcal{F}_{1,\infty} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gelten:

a) $\mathcal{F}_{1,\infty}(f)(\omega) \;=\; \hat{f}(\omega) \;=\; \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \,\mathrm{d}x$,

b) $\|\mathcal{F}_{1,\infty}(f)\|_\infty \leq \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$,

c) $\mathrm{Bild}(\mathcal{F}_{1,\infty}) \subseteq \big\{ f \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : f(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty \big\}$.

2) $\mathcal{F}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen und linearen Abbildung $\mathcal{F}_{2,2} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Es gelten:

a) $\mathcal{F}_{2,2}$ ist unitär, d.h. bijektiv und isometrisch ($\|\mathcal{F}_{2,2}(f)\|_2 = \|f\|_2$),

b) $\mathcal{F}_{2,2}(f) = L^2\text{-}\lim\limits_{R \to \infty} \displaystyle\int_{|x| \leq R} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \cdot x} \,\mathrm{d}x$,

c) $\mathcal{F}_{2,2}(f) = \mathcal{F}_{1,\infty}(f)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

3) Satz von Hausdorff-Young: Für $1 \leq p \leq 2,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ besitzt $\mathcal{F}$ eine eindeutige stetige und lineare Fortsetzung $\mathcal{F}_{p,q} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\big\|\mathcal{F}_{p,q}(f)\big\|_q \ \leq \ \frac{1}{(2\pi)^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}}\|f\|_p.$$

***2.28 Beispiel**:* Gegeben: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Gesucht: $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta u + u = f$ in $\mathbb{R}^n$ $\quad (\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2)$.
Eindeutige Lösung: $u = \mathcal{F}^{-1}\Big(\dfrac{1}{(.)^2+1} \cdot \hat{f}\Big)$
Mit $g := \mathcal{F}^{-1}\Big(\dfrac{1}{(.)^2+1}\Big)$ folgt $u = g * f$.

Höhere Analysis

Teil III: Distributionen

1 Vorüberlegungen

Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

Für $x \neq 0$: $\nabla f = -\frac{x}{|x|^3}$

$\Delta f = 0$

Physik: $-\Delta f = 4\pi\delta_0$ „Diracsche Delta-Funktion“

$$\left.\begin{array}{l} \delta_0 = 0 \text{ für } x \neq 0 \\ \delta(0) = \infty \text{ so dass } \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \delta_0 = 1 \end{array}\right\} \text{geht natürlich nicht}$$

Plan: Erweitere $C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ zu einem linearen topologischen Raum $S'(\mathbb{R}^n)$, in dem gelten:

- $D_j : f \mapsto \partial_{x_j} f$ sind stetige Abbildungen,
- D_j eindeutig auf $S'(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar,
- $f\Big(x \mapsto \frac{1}{|x|}\Big), \delta_0 \in S'(\mathbb{R}^3)$ und $-\Delta f = -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) f = \delta_0$.

2 Konstruktion des Raumes

2.1 Definition: **1)** Der Schwartz-Raum:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) \;\Big|\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \; \forall j \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^j \cdot \big|\nabla^\alpha \varphi(x)\big| < \infty\Big\}$$

2) $\|\varphi\|_j := \sum\limits_{|\alpha| \leq j} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \big(1 + |x|\big)^j \cdot \big|\nabla^\alpha \varphi(x)\big|$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ j \in \mathbb{N}_0$,
(Beachte: $\|\varphi\|_j \leq \|\varphi\|_k$ für $j \leq k$.)

3) $d(\varphi, \psi) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|\varphi - \psi\|_j}{1 + \|\varphi - \psi\|_j}$ für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Satz: **1)** d ist eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

2) $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d\big)$ ist ein vollständiger metrischer Raum (Frèchet-Raum).

Ohne Beweis.
Hinweis: (φ_j) Cauchy-Folge bezüglich d
$\Rightarrow\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (\nabla^\alpha \varphi_j)$ ist Cauchy-Folge bezüglich Supremums-Norm
$\Rightarrow\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (\nabla^\alpha \varphi_j)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion.

2.3 Satz: Für eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) T ist stetig,

(ii) $\exists j \in \mathbb{N}_0\ \exists c > 0\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi)\big| \leq c\|\varphi\|_j$.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeige $T(f_k) \to T(f)$.

$$\begin{aligned} d(f_k, f) \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \|f_k - f\|_j \leq 2^j\, d(f_k, f) \to 0 \\ &\Rightarrow \quad \big|T(f_k) - T(f)\big| = \big|T(f_k - f)\big| \overset{\text{(ii)}}{\leq} c\|f_k - f\|_j \to 0 \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Zeige: $\neg$(ii) $\Rightarrow$ T nicht stetig (Kontraposition)
$\neg$(ii) $\Leftrightarrow$ $\forall j \in \mathbb{N}_0\ \forall c > 0\ \exists \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi)\big| > c\|\varphi\|_j$
$\Rightarrow\ \forall j \in \mathbb{N}_0\ \exists \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi_j)\big| > j\|\varphi_j\|_j$
Setze $f_j := \dfrac{1}{j\,\|\varphi_j\|_j}\,\varphi_j$. Dann:

- $$\begin{aligned} d(f_j, 0) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f_j\|_k}{1 + \|f_j\|_k} \\ &\leq \quad \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|f_j\|_k}{1} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 1 \\ &\leq \quad \Big(\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{2^k}\Big) \cdot \frac{1}{j} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^j \\ &\leq \quad \frac{1}{j} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^j \\ &\to \quad 0 \end{aligned}$$

- $\big|T(f_j)\big| = \dfrac{1}{j\,\|\varphi_j\|_j}\big|T(\varphi_j)\big| \geq \dfrac{1}{j\,\|\varphi_j\|_j} \cdot j\,\|\varphi_j\|_j = 1$

$\Rightarrow\ f_j \to 0 = T(0)\ \wedge\ \neg\big(T(f_j) \to 0\big)\ \Rightarrow\ T$ nicht stetig in 0. $\square$

2.4 Definition: Eine **temperierte Distribution** ist eine lineare stetige Abbildung

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}.$$

Der Raum der temperierten Distribustionen besteht aus der Menge

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;:=\; \big\{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\},$$

versehen mit der linearen Struktur

$$\begin{aligned}(S+T)(\varphi) &:= S(\varphi)+T(\varphi)\\ (\alpha\cdot T)(\varphi) &:= \alpha T(\varphi)\end{aligned}$$

für $S, T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (d.h. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Raum) und dem Konvergenzbegriff

$$T_j \to T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;:\Leftrightarrow\; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : T_j(\varphi) \to T(\varphi).$$

2.5 Beispiele: **1)** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Die **Diracsche Delta-Distribution**:

$$\delta_{x_0}(\varphi) \;:=\; \varphi(x_0) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2) Zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p \le \infty$ setze

$$T_f(\varphi) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $\big|T(\varphi)\big| \le c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\varphi\|_{n+1}$.

2.6 Beispiel: Sei (x_j) Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x_j \to x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt $\delta_{x_j} \to \delta_{x_0}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Für beliebige $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\delta_{x_j}(\varphi) \;=\; \varphi(x_j) \;\overset{\varphi \text{ stetig}}{\to}\; \varphi(x_0) \;=\; \delta_{x_0}(\varphi).$$

2.7 Bemerkung: Seien $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dann $T = S \;\Leftrightarrow\; \big(\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : T(\varphi) = S(\varphi)\big)$.

3 Einbettung klassischer Funktionenräume

3.1 Satz: Sei $1 \le p \le \infty$. Die Abbildung

$$\Phi : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : f \mapsto T_f$$

ist linear, injektiv und stetig.

Beweis: **1)** $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Siehe 2.5.

2) Φ ist linear:
$$\begin{aligned}\Phi(\alpha f+\beta g)(\varphi) &= T_{\alpha f+\beta g}(\varphi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha T_f(\varphi)+\beta T_g(\varphi)\\ &= \alpha\Phi(f)(\varphi)+\beta\Phi(g)(\varphi)\end{aligned}$$
für beliebige $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also $\Phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g)$.

3) Φ ist injektiv: $T_f=T_g \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\int_{\mathbb{R}^n}\big(\underbrace{f(x)-g(x)}_{=:u(x)}\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=0.$

a) Abschneiden: $\psi_R\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0\le\psi_R\le 1$, $\psi_R(x)=1$ für $|x|\le R$
$$\Rightarrow\; T_{\psi_R\cdot u}(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\psi_R\cdot u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}u\cdot\underbrace{\psi_R\cdot\varphi}_{\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$
Also: $T_{\psi_R\cdot u}=0$, $\operatorname{supp}(\psi_R\cdot u)\subseteq\operatorname{supp}(\psi_R)$ kompakt, $\psi_R\cdot u\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Approximieren:
$$\big\|J_\varepsilon(\psi_R\cdot u)-\psi_R\cdot u\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\to 0\quad\text{für }\varepsilon\downarrow 0\text{ (vgl. 4.28)}$$
$$J_\varepsilon(\psi_R\cdot u)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}j_\varepsilon(x-y)\psi_R(y)u(y)\,\mathrm{d}y \;\overset{\text{a)}}{=}\; 0$$
$$\Rightarrow\quad \|\psi_R\cdot u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$$
$\Rightarrow\quad \psi_R\cdot u=0$ f.ü. Insbesondere: $\mu\big(\{x\in B_R(0):u(x)\neq 0\}\big)=0.$

c) Zusammenfassen:
$$\begin{aligned}\mu\big(\{x\in\mathbb{R}^n:u(x)\neq 0\}\big) &\le \mu\Big(\bigcup_{R=1}^\infty\{x\in B_R(0):u(x)\neq 0\}\Big)\\ &\le \sum_{R=1}^\infty\mu\big(\{x\in B_R(0):u(x)\neq 0\}\big)\\ &= 0\end{aligned}$$
$\Rightarrow\; u=0$ f.ü., also $f=g$ f.ü.

4) Φ ist stetig: $\|f_j-f\|\to 0 \;\Rightarrow\; \big|T_{f_j}(\varphi)-T_f(\varphi)\big|=\big|T_{f_j-f}(\varphi)\big|\overset{2.5}{\le} c\|f_j-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\cdot\|\varphi\|_{n+1}\to 0.$ □

3.2 Einbettung: **1)** Wir identifizieren $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt
$$L^p(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\quad\text{für }1\le p\le\infty.$$

2) $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **reguläre** Distribution, falls
$$\exists p\in[1,\infty]\;\exists f\in L^p(\mathbb{R}^n):T=T_f,$$
andernfalls heißt T (vorläufig) **singulär**.

3) Falls $T = T_f$ schreibe $(T_f, \varphi) := (f, \varphi) := T_f(\varphi)$.

3.3 Beispiele: **1)** δ_{x_0} ist singulär.

2) In $\mathbb{R}^1$: $T(\varphi) \;:=\; \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \Big) \;=\;$ C.H. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$
$\Rightarrow$ T ist singulär.

3.4 Bemerkung: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

4 Differentiation

4.1 Hilfssatz: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $T_{\nabla^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\varphi)$.

Beweis: Füe $\alpha = e_j$:

$$\begin{aligned} T_{\partial_{x_j} f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_{x_j} f\big)\varphi\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} 0 - \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\partial_{x_j}\varphi\big)\,\mathrm{d}x \\ &= -T_f\big(\partial_{x_j}\varphi\big). \end{aligned}$$

Für weitere Ableitungen genauso. $\square$

4.2 Definition: Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\big(D^\alpha T\big)(\varphi) \;:=\; (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$D^\alpha T$ heißt **Distributionenableitung** oder **schwache** oder **verallgemeinerte** Ableitung.

4.3 Satz: **1)** Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Jede Distribution ist im verallgemeinerten Sinn beliebig oft differenzierbar.

2) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $D^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$: D^α ist eine Fortsetzung von ∇^α.

3) Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $D^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig.
[Insbesondere: Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist, ist D^α die einzige stetige Fortsetzung.]

4) E gilt der Satz von Schwarz: $D^\beta(D^\alpha T) = D^\alpha(D^\beta T)$.

Beweis: **1)** • $D^\alpha T$ ist linear: Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}(D^\alpha T)(a\varphi + b\psi) &= (-1)^{|\alpha|} T\big(\nabla^\alpha(a\varphi + b\psi)\big) \overset{T\text{ linear}}{=} (-1)^{|\alpha|}\big(aT(\nabla^\alpha\varphi) + bT(\nabla^\alpha\psi)\big) \\ &= a(D^\alpha T)(\varphi) + b(D^\alpha T)(\psi).\end{aligned}$$

• $D^\alpha T$ ist stetig: Es gelte $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad d(\varphi_k, \varphi) \to 0 \\ &\overset{4.4}{\Leftrightarrow} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 : \|\varphi_k - \varphi\|_j \to 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 : \|\nabla^\alpha(\varphi_k - \varphi)\|_j \leq \|\varphi_k - \varphi\|_{j+|\alpha} \to 0 \\ &\overset{4.4}{\Leftrightarrow} \quad \nabla^\alpha\varphi_k \to \nabla^\alpha\varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ &\overset{T\text{ stetig}}{\Rightarrow} \quad T(\nabla^\alpha\varphi_k) \to T(\nabla^\alpha\varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad (D^\alpha T)(\varphi_k) \to (D^\alpha T)(\varphi).\end{aligned}$$

2) Siehe 4.1

3) Es gelte $T_j \to T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$(D^\alpha T_j)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_j(\nabla^\alpha\varphi) \underset{\nabla^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}{\overset{T_j \to T}{\to}} (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha\varphi) = (D^\alpha T)(\varphi).$$

4) $\big(D^\alpha(D^\beta T)\big)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\beta T)(\nabla^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} T\big(\nabla^\beta(\nabla^\alpha\varphi)\big)$
$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} T\big(\nabla^\alpha(\nabla^\beta\varphi)\big) = (-1)^{|\beta|}(D^\alpha T)(\nabla^\beta\varphi) = \big(D^\beta(D^\alpha T)\big)(\varphi).$ □

4.4 Hilfssatz: Seien $\varphi, \varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:

(i) $d(\varphi_k, \varphi) \to 0$,

(ii) $\forall j \in \mathbb{N}_0 : \|\varphi_k - \varphi\|_j \to 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Für $k \to \infty$ gilt

$$d(\varphi_k, \varphi) \to 0 \;\Rightarrow\; \forall j \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|\varphi_k - \varphi\|_j}{1 + \|\varphi_k - \varphi\|_j} \to 0 \;\Rightarrow\; \forall j \in \mathbb{N}_0 : \|\varphi_k - \varphi\|_j \to 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; d(\varphi_k, \varphi) &\leq \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|\varphi_k - \varphi\|_j}{1 + \|\varphi_k - \varphi\|_j} + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|\varphi_k - \varphi\|_j}{1 + \|\varphi_k - \varphi\|_j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{2^j} \cdot \|\varphi_k - \varphi\|_l + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &\leq \|\varphi_k - \varphi\|_l \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^l} \\ &< 2\|\varphi_k - \varphi\|_l + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \quad \text{für } k > K_\varepsilon.\end{aligned}$$

□

4.5 Reguläre Distributionen: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar mit

$$\exists j \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{(1+|.|)^j} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

und

$$T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann gilt $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **reguläre Distribution**, falls ein f mit obiger Eigenschaft existiert, so dass $T = T_f$ gilt. Andernfalls heißt T (vorläufig) **singulär**.

Hinweis: Genauso wie bei 2.5:

$$\big|T_f(\varphi)\big| \;=\; \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{(1+|x|)^j} \cdot (1+|x|)^j \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leq\; \|\varphi\|_j \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big|f(x)\big|}{(1+|x|)^j}\,\mathrm{d}x.$$

4.6 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow\; D^1 f = h$ mit $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ (Heaviside-Funktion, Einschaltfunktion).

Denn:
$$\begin{aligned} D^1 f(\varphi) \;&=\; (D^1 T_f)(\varphi) \;=\; -T_f(\varphi') \;=\; -\int_0^\infty x \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \underbrace{-x \cdot \varphi(x)\big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty 1 \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; T_h(\varphi). \end{aligned}$$

$D^2 f = D^1 h = \delta_0$:

$$(D^1 T_h)(\varphi) \;=\; -T_h(\varphi') \;=\; -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\varphi(x)\big|_0^\infty \;=\; \varphi(0) \;=\; \delta_0(\varphi).$$

$D^3 f = D^1 \delta_0$, wobei $D^1\delta_0(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0)$.

$(D^k f)(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k-2)}(0)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f \in C^1(\,]-\infty, x_0[\,) \;\wedge\; f \in C^1(\,]x_0, \infty[\,) \;\wedge\; f(x_0 \pm 0), f'(x_0 \pm 0)$ existieren. Dann:

$$D^1 f \;=\; \underbrace{f'}_{\text{klassische Ableitung für } x \neq x_0\text{, Wert bei } x = x_0 \text{ egal}} + \big(f(x_0+0) - f(x_0-0)\big)\delta_{x_0}.$$

Also: Knick $\xrightarrow{\text{Ableitung}}$ Sprungstelle
Sprungstelle $\xrightarrow{\text{Ableitung}}$ δ-Distribution

3) In $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $(D^\alpha \delta_{x_0})(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_{x_0}(\nabla^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\nabla^\alpha\varphi)(x_0)$.

4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Dann ist T_f eine reguläre Distribution, denn

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x|)^3} \cdot \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^3} \cdot \frac{1}{r} \cdot r^2\,\mathrm{d}r\,\sin(\theta)\,\mathsf{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \;<\; \infty.$$

Behauptung: $\Delta f = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) f = -4\pi\delta_0$ im schwachen Sinne.
D.h. Zu zeigen: Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\big(D^{(2,0,0)}\big)T_f(\varphi) + \big(D^{(0,2,0)}\big)T_f(\varphi) + \big(D^{(0,0,2)}\big)T_f(\varphi) \;=\; -4\pi\delta_0(\varphi)\\
\Leftrightarrow\quad &(-1)^2 T_f(\partial_{x_1}^2\varphi) + (-1)^2 T_f(\partial_{x_2}^2\varphi) + (-1)^2 T_f(\partial_{x_3}^2\varphi) \;=\; -4\pi\varphi(0)\\
\Leftrightarrow\quad &T_f(\Delta\varphi) \;=\; -4\pi\varphi(0)
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist also: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -4\pi\varphi(0)$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta T_f(\varphi) \;=\; (-1)^2 T_f(\Delta\varphi) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} \cdot (\Delta\varphi)(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\; \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{1}{|x|} \cdot (\Delta\varphi)(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{1}{|x|} \cdot (\Delta\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \quad &=\quad \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \Big(\frac{1}{|x|} \cdot (\Delta\varphi)(x) - \Delta\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x\\
&=\quad \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \nabla \cdot \Big(\frac{1}{|x|} \cdot (\nabla\varphi)(x) - \Big(\nabla\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{Gauß}}{=}}\quad \int_{\{x:|x|=\varepsilon\ \vee\ |x|=R\}} n \cdot \Big(\frac{1}{|x|} \cdot (\nabla\varphi)(x) - \Big(\nabla\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\Big)\mathsf{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Für $R \to \infty$ gilt $\displaystyle\int_{|x|=R} n \cdot \Big(\frac{1}{|x|} \cdot (\nabla\varphi)(x) - \Big(\nabla\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\Big)\mathsf{d}\sigma \;\to\; 0.$

Für $|x| = \varepsilon$ gilt $n = -\dfrac{x}{|x|}$. Damit folgt einerseits

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{|x|=\varepsilon} n \cdot \frac{1}{|x|} \cdot (\nabla\varphi)(x)\mathsf{d}\sigma\Big| \;&=\; \Big|\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^2} \cdot x \cdot (\nabla\varphi)(x)\mathsf{d}\sigma\Big|\\
&\le\; \int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^2} \cdot |x| \cdot \|\varphi\|_1\mathsf{d}\sigma\\
&=\; \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\varphi\|_1 \int_{|x|=\varepsilon} \mathsf{d}\sigma\\
&=\; \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|\varphi\|_1 \cdot 4\pi\varepsilon^2\\
&\to\; 0 \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0,
\end{aligned}$$

und andererseits mit $\nabla\frac{1}{|x|} = -\frac{x}{|x|^3}$

$$\begin{aligned} \Big|\int_{|x|=\varepsilon} n\cdot\Big(\nabla\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\mathrm{d}\sigma - 4\pi\varphi(0)\Big| &= \Big|\int_{|x|=\varepsilon} \underbrace{\frac{x\cdot x}{|x|^4}}_{=1/\varepsilon^2}\varphi(x)\mathrm{d}\sigma - \int_{|x|=\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(0)\mathrm{d}\sigma\Big| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon}\big|\varphi(x)-\varphi(0)\big|\mathrm{d}\sigma \\ &\to 0 \quad \text{für } \varepsilon\downarrow 0. \end{aligned}$$

Die letzten Umformungen zeigen

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|=\varepsilon} n\cdot\Big(\nabla\frac{1}{|x|}\Big)\varphi(x)\mathrm{d}\sigma \;=\; 4\pi\varphi(0).$$

Insgesamt folgt

$$\Delta T_f(\varphi) \;=\; \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le R}\frac{1}{|x|}\cdot(\Delta\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -4\pi\varphi(0).$$

4.7 Satz: **1)** $T_j\to T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n: D^\alpha T_j\to D^\alpha T$.

2) $\sum_{j=1}^\infty T_j = T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n: \sum_{j=1}^\infty D^\alpha T_j = D^\alpha T = D^\alpha\Big(\sum_{j=1}^\infty T_j\Big)$.

Beweis: **1)**
$$\begin{aligned} T_j\to T \;&\Leftrightarrow\; \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n): T_j(\varphi)\to T(\varphi) \\ &\Rightarrow\; \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n): T_j(D^\alpha\varphi)\to T(D^\alpha\varphi) \\ &\Leftrightarrow\; D^\alpha T_j\to D^\alpha T. \end{aligned}$$

2) Folgt aus 1).

□

4.8 Beispiele: **1)** $f_j(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^j, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases} \;\to\; f(x) \;:=\; \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$ punktweise.

In $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: $f_j\to f$, denn für $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$T_{f_j}(\varphi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f_j\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\cdot\varphi\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^j\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\to\; T_f(\varphi).$$

2) $f(x) = \frac{\pi}{4}|x|$ für $-\pi\le x\le\pi$, 2π-periodisch fortgesetzt.

Fourierreihe: $f(x) = g(x) := \frac{\pi^2}{8} - \sum_{j=0}^\infty \frac{\cos(2j+1)x}{(2j+1)^2}$

(Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, da Majorante $\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(2j+1)^2} < \infty$.)

$$D^1 f \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$, 2π-periodisch fortgesetzt.

$$D^1 g \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(2j+1)x}{2j+1} \overset{\text{verallgemeinerte}}{\underset{\text{Dini-Bedingung}}{=}} \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x \in \{0, \pi, -\pi\} \end{cases}$$ 2π-periodisch fortgesetzt.

$$D^2 f \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2}(-1)^j \delta_{j\pi},$$

$$D^2 g \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \cos(2j+1)x.$$

Also: $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \cos(2j+1)x \;=\; \frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \delta_{j\pi}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5 Fouriertransformation

5.1 Vorüberlegung: Für $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} T_{\hat f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat f(\omega)\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot x}\,\mathrm{d}x\,\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot x}\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= T_f(\hat\varphi) \end{aligned}$$

5.2 Definition und Satz: Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\mathcal{F}(T) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto T\big(\mathcal{F}(\varphi)\big).$$

Es gelten:

1) $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

2) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig. $\mathcal{F}$ heißt **Fouriertransformation**.

3) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$: $\mathcal{F}$ ist Fortsetzung der Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
[Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}$ eindeutig.]

4) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv: $\mathcal{F}^{-1}(T)(\varphi) = T\big(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big)$.

Beweis: **1)** **a)** $\mathcal{F}(T)$ ist wohldefiniert, denn $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) $\mathcal{F}(T) = T \circ \mathcal{F}$ ist linear als Verkettung linearer Abbildungen.

c) $\mathcal{F}(T)$ ist stetig: Nach 2.3: T stetig $\Rightarrow\; \exists j \in \mathbb{N}_0\; \exists c > 0\; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi)\big| \le c\|\varphi\|_j$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \big|\mathcal{F}(T)(\varphi)\big| \quad &= \quad \big|T(\hat{\varphi})\big| \\
&\le \quad c\|\hat{\varphi}\|_j \\
&\overset{1+|\omega|\le 2+\omega^2}{\le} \quad c\sum_{|\alpha|\le j} \Big\| \underbrace{\big(2+\omega^2\big)^j \nabla_\omega^\alpha \hat{\varphi}(\omega)}_{=\mathcal{F}\left(x\mapsto(2-\Delta_x)^j(x^\alpha\varphi(x))\right)} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{\text{Teil II, 2.27}}{\le} \quad \frac{c}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{|\alpha|\le j} \big\|(2-\Delta_x)^j(x^\alpha\varphi(x))\big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \quad \frac{c'}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{|\beta|\le 2j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}(1+|x|)^{j+n+1}\big|\nabla^\beta\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \quad c''\|\varphi\|_{2j+n+1} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\,\mathrm{d}x}_{<\infty}
\end{aligned}$$

Also: $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \big|\mathcal{F}(T)(\varphi)\big| \le c'''\|\varphi\|_{2j+n+1}$
$\overset{2.3}{\Rightarrow}$ $\mathcal{F}(T)$ ist stetig.

2) Linear ✓
Aus $T_j \to T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\mathcal{F}(T_j)(\varphi) \;=\; T_j\big(\mathcal{F}(\varphi)\big) \;\to\; T\big(\mathcal{F}(\varphi)\big) \;=\; \mathcal{F}(T)(\varphi).$$

3) Siehe Vorüberlegung.

4) Sei $\mathcal{G} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{G}(T)(\varphi) := T\big(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big)$. Dann folgt $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} =$ Id.

□

5.3 Beispiel: $\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = g$ mit $g(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot x_0}$, denn

$$\big(\mathcal{F}(\delta_{x_0})\big)(\varphi) \;=\; \delta_{x_0}\big(\mathcal{F}(\varphi)\big) \;=\; \mathcal{F}(\varphi)(x_0) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot x_0}\,\mathrm{d}x \;=\; T_g(\varphi).$$

5.4 Multiplikation: Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ mit

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\; \exists k_\alpha \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\nabla^\alpha u(x)}{(1+|x|)^{k_\alpha}}\right| < \infty.$$

Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ setzen wir $(u\cdot T)(\varphi) := T(u\varphi)$. Dann gelten:

1) $u \cdot T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

2) Die Abbildung $M_u : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : T \mapsto u \cdot T$ ist linear und stetig,

3) $u \cdot T_f = T_{u \cdot f}$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: **1)** $u \cdot T$ ist wohldefiniert, denn $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; u\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$u \cdot T$ ist linear ✓

$u \cdot T$ ist stetig:

$$\begin{aligned}
\big|(u \cdot T)(\varphi)\big| &= \big|T(u\varphi)\big| \\
&\overset{2.3}{\leq} c \cdot \|u\varphi\|_j \quad \text{für geeignet gewähltes } j \\
&= c \cdot \sum_{|\alpha| \leq j} \big\|(1+|x|)^j \nabla^\alpha \big(u(x) \cdot \varphi(x)\big)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{K:=\max\{k_\alpha : |\alpha| \leq j\}}{\leq} c' \cdot \Big(\sum_{|\alpha| \leq j} \Big\| \frac{\nabla^\alpha u(x)}{(1+|x|)^K} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \Big) \cdot \\
&\qquad \cdot \Big(\sum_{|\alpha| \leq j} \big\|(1+|x|)^{j+K} \nabla^\alpha \varphi(x)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \Big) \\
&\leq d \, \|\varphi\|_{j+K}
\end{aligned}$$

$\overset{2.3}{\Rightarrow}$ $u \cdot T$ ist stetig.

2) $T_j \to T \;\Rightarrow\; (u \cdot T_j)(\varphi) \;=\; T_j(u \cdot \varphi) \;\to\; T(u \cdot \varphi) \;=\; (u \cdot T)(\varphi)$.

3) $(u \cdot T_f)(\varphi) \;=\; T_f(u\varphi) \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x \;=\; T_{u \cdot f}(\varphi)$. □

5.5 Faltung: Seien $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Setze $f^-(x) := f(-x)$

$$(T * f)(\varphi) \;:=\; T(f^- * \varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gelten:

1) $T * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

2) Für festes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $*_f : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : T \mapsto T * f$ linear und stetig,

3) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $T_g * f = T_{g*f}$.

Beweis: **1)** $T * f$ ist wohldefiniert, denn $f^- \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; f^- * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$T * f$ ist linear ✓

$T * f$ ist stetig:

$$\begin{aligned}
\big|(T * f)(\varphi)\big| &= \big|T(f^- * \varphi)\big| \\
&\overset{2.3}{\leq} c \, \|f^- * \varphi\|_j \\
&\overset{\text{Hilfssatz 5.6}}{\leq} c' \, \|f^-\|_k \cdot \|\varphi\|_k \quad \text{mit } k := \max\{j, 2n+2\}
\end{aligned}$$

$\overset{2.3}{\Rightarrow}$ $T * f$ ist stetig.

2) Nachrechnen

3) $(T_g * f)(\varphi) \;=\; T_g(f^- * \varphi) \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(f^- * \varphi)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$T_{g*f}(\varphi) \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(g*f)}_{=f*g}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\; (T_g * f)(\varphi) \;=\; T_{g*f}(\varphi)$. □

***5.6 Hilfssatz**:* Zu jedem $j \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\varphi * \psi\|_j \;\le\; c\|\varphi\|_k \cdot \|\psi\|_k \quad \text{mit } k := \max\{j, 2n+1\}.$$

Beweis: **1)** Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\big(1+|y|\big)^{1/2}\big(1+|x-y|\big) \;\ge\; \Big(1+\frac{|x|}{2}\Big)^{1/2} \;\ge\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+|x|\big)^{1/2}, \qquad (*)$$

denn $|y| \ge \frac{1}{2}|x| \;\Rightarrow\; \big(1+|y|\big)^{1/2}\big(1+|x-y|\big) \;\ge\; \big(1+|y|\big)^{1/2} \;\ge\; \Big(1+\frac{|x|}{2}\Big)^{1/2}$

$|y| \le \frac{1}{2}|x| \;\Rightarrow\; |x-y| \;\ge\; |x|-|y| \;\ge\; \frac{1}{2}|x|$

$\Rightarrow\; \big(1+|y|\big)^{1/2}\big(1+|x-y|\big) \;\ge\; \big(1+|x-y|\big) \;\ge\; 1+\frac{1}{2}|x| \;\ge\; \Big(1+\frac{|x|}{2}\Big)^{1/2}.$

2) Seien $k \ge 2n+2$ und $|\alpha| \le k$. Mit

$$\big|\nabla^\alpha\varphi(x)\big| \;\le\; \frac{\|\varphi\|_k}{\big(1+|x|\big)^k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\big|\psi(x)\big| \;\le\; \frac{\|\psi\|_k}{\big(1+|x|\big)^k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

folgt

$$\begin{aligned}
\big|\nabla^\alpha(\varphi*\psi)(x)\big| \;&=\; \big|\big((\nabla^\alpha\varphi)*\psi\big)(x)\big| \\
&=\; \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla^\alpha\varphi)(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\Big| \\
&\le\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\varphi\|_k\cdot\|\psi\|_k}{\big(1+|x-y|\big)^k\big(1+|y|\big)^{k/2}\big(1+|y|\big)^{k/2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{1)}{\le}\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\varphi\|_k\cdot\|\psi\|_k}{\big(1+\frac{1}{2}|x|\big)^{k/2}\big(1+|y|\big)^{k/2}}\,\mathrm{d}y \\
&=\; \frac{1}{\big(1+\frac{1}{2}|x|\big)^{k/2}}\,\|\varphi\|_k\cdot\|\psi\|_k\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|y|)^{k/2}}\,\mathrm{d}y \\
&\le\; \frac{c}{(1+|x|)^{k/2}}\,\|\varphi\|_k\cdot\|\psi\|_k
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\; \|\varphi*\psi\|_j \;\overset{j\le k}{\le}\; \|\varphi*\psi\|_k \;\le\; c'\|\varphi\|_k\cdot\|\psi\|_k$. □

5.7 Beispiel: $\delta_0 * f = f$:

$$(\delta_0 * f)(\varphi) \;=\; \delta_0(f^- * \varphi) \;=\; (f^- * \varphi)(0) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(y-0)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \;=\; T_f(\varphi).$$

5.8 Satz: **1)** $(T * f)(x) = T_y\big(f(x-y)\big) := T\big(f(x-.)\big)$,

2) $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$, $\nabla^\alpha(T * f) = T * \nabla^\alpha f$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Beweis: Sei $g(x) := T_y\big(f(x-y)\big)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Wir zeigen:

a) $g \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ und $\exists k \in \mathbb{N} : \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \dfrac{|g(x)|}{(1+|x|)^k} < \infty$,

b) $T * f = T_g$. Dann 1) bewiesen.

c) $\nabla^\alpha g = T * \nabla^\alpha f$. Mit a) folgt $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$.

Zu a)
$$\begin{aligned}
\big|g(x+h) - g(x)\big| &= \big|T_y\big(f(x+h-y)\big) - T_y\big(f(x-y)\big)\big| \\
&= \big|T_y\big(f(x+h-y) - f(x-y)\big)\big| \\
&\overset{2.3}{\leq} c \cdot \big\|f(x+h-.) - f(x-.)\big\|_j \\
&\leq c'h \cdot \|f\|_{j+1} \;\to\; 0 \quad \text{für } h \to 0,
\end{aligned}$$

$$\big|g(x)\big| \;=\; \big|T_y\big(f(x-y)\big)\big| \;\overset{2.3}{\leq}\; c\|f(x-.)\|_j \;=\; c(1+|x|)^j\|f\|_{2j}$$

$$\Big[\big(1+|y|\big)^j\big|f(x-y)\big| \;\overset{(*)}{\leq}\; \sqrt{2}\big(1+|x|\big)^j\big(1+|x-y|\big)^{2j}\big|f(x-y)\big| \;\leq\; \sqrt{2}\big(1+|x|\big)^j\|f\|_{2j}\Big]$$

Zu b)
$$\begin{aligned}
(T * f)(\varphi) &= T(f^- * \varphi) \\
T_g(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} T_y\big(f(x-y)\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Riemann-Summen}}{=} T_y\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x-y)}_{=f^-(y-x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= T_y\big((f^- * \varphi)(y)\big).
\end{aligned}$$

Zu c)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big(g(x+he_j) - g(x)\big) &= \frac{1}{h}\Big(T_y\big(f(x+he_j-y)\big) - T_y\big(f(x-y)\big)\Big) \\
&= T_y\Big(\underbrace{\frac{1}{h}\big(f(x+he_j-y) - f(x-y)\big)}_{\to \partial_{x_j} f(x-y) \text{ für } h \to 0}\Big) \\
&\overset{T \text{ stetig}}{\to} T(\partial_{x_j} f).
\end{aligned}$$

$\square$

5.9 Weitere Eigenschaften:
$$\begin{aligned} (T*f)*g &= T*(f*g), \\ \nabla^\alpha(T*f) &= (D^\alpha T)*f. \end{aligned}$$

Beweis: $\big((T*f)*g\big)(\varphi) \;=\; (T*f)(g^- * \varphi) \;=\; T\big(\underbrace{f^- * (g^- * \varphi)}_{=(f^- * g^-)*\varphi = (f*g)^- * \varphi}\big) \;=\; \big(T*(f*g)\big)(\varphi)$

Wegen $T*f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$ und $\dfrac{T*f}{(1+|.|)^k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\nabla^\alpha(T*f) = D^\alpha(T*f)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \big(D^\alpha(T*f)\big)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(T*f)(\nabla^\alpha\varphi) \;=\; (-1)^{|\alpha|}T(f^- * \nabla^\alpha\varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|}T\big(\nabla^\alpha(f^- * \varphi)\big) \;=\; (D^\alpha T)(f^- * \varphi) \;=\; \big((D^\alpha T)*f\big)(\varphi) \end{aligned}$$

□

5.10 Satz:
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^\alpha T) &= \mathrm{i}^{|\alpha|} \cdot \mathsf{Id}^\alpha \cdot \mathcal{F}(T) \quad (\mathsf{Id}^\alpha(x) = x^\alpha \text{ für } x \in \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{F}(\mathsf{Id}^\alpha \cdot T) &= \mathrm{i}^{|\alpha|} D^\alpha\big(\mathcal{F}(T)\big), \\ \mathcal{F}(T*f) &= (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(T). \end{aligned}$$

Beweis: Nachrechnen

5.11 Beispiel: Gesucht: $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta T = \delta_0$.

1) Was bringt diese Lösung? Zu gegebenem $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sei $u(x) \;:=\; (T*f)(x)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) \\ -\Delta u = (-\Delta T)*f = \delta_0 * f = f \end{cases}$$

D.h. u ist klassische Lösung der Potentialgleichung $-\Delta u = f$.

2) Finde die Lösung:

$$\begin{aligned} -\Delta T = \delta_0 \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(-\Delta T) = \mathcal{F}(\delta_0) \\ &\Leftrightarrow\; \omega^2 \cdot \mathcal{F}(T) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \\ &\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(T) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\omega^2} \\ &\Leftrightarrow\; T = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,\omega^2}\Big) \end{aligned}$$

Anmerkungen: **1)** Im Fall $n \geq 3$ gilt für $f(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2}$: $\dfrac{1}{(1+|\omega|)^2} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. 4.5).
2) T heißt **Grundlösung** oder **Fundamentallösung** zur Potentialgleichung.

6 Schwartzsche Distributionen

6.1 Definition: Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi_j, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann heißt die Folge (φ_j) **D-konvergent** gegen φ (in Ω), falls

1) $\exists K \subseteq \Omega$ kompakt $\forall j \in \mathbb{N} : \mathrm{supp}\,(\varphi_j) \subseteq K$ und

2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \nabla^\alpha \varphi_j \to \nabla^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf Ω. (Insbesondere folgt $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subseteq K$.)

Schreibweise: $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi$.
Der lineare Raum $C_0^\infty(\Omega)$ versehen mit diesem Konvergenzbegriff heißt **Raum der Testfunktionen** und wird mit $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnet.
[$\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein vollständiger lokalkonvexer topologischer Raum, vgl. z.B. Reed-Simon.]

6.2 Definition: Eine **schwartzsche Distribution** ist eine lineare, stetige Abbildung $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ (stetig: $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi \;\Rightarrow\; T(\varphi_j) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$).
Der Raum der schwartzschen Distributionen besteht aus der Menge

$$\mathcal{D}'(\Omega) \;:=\; \big\{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \;\big|\; T \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

versehen mit der linearen Struktur

$$\begin{aligned} (S+T)(\varphi) &:= S(\varphi) + t(\varphi), \\ (\alpha \cdot T)(\varphi) &:= \alpha\, T(\varphi) \end{aligned}$$

für $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ und dem Konvergenzbegriff

$$T_j \to T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \;:\Leftrightarrow\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : T_j(\varphi) \to T(\varphi).$$

[$\mathcal{D}'(\Omega)$ ist als topologischer Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert und ist vollständig.]

6.3 Satz: Sei $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann $T\big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: **1)** $T\big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ist linear ✓

2) $T\big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ist stetig:

$$\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi \overset{\text{Übungen}}{\Rightarrow} \varphi_j \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; T(\varphi_j) \to T(\varphi).$$

$\square$

6.4 Beispiele: **1)** $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2) Setze

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \;:=\; \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\big|\; f \text{ ist messbar } \;\wedge\; \forall K \subseteq \Omega : K \text{ kompakt } \;\Rightarrow\; f \in L^1(K) \big\}.$$

Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definiere T_f durch

$$T_f(\varphi) \;:=\; \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$: T_f ist wohldefiniert und linear.
T_f ist stetig: Sei $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi$, $\operatorname{supp}(\varphi_j), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, $K \subseteq \Omega$ kompakt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \big|T_f(\varphi_j) - T(\varphi)\big| \;&=\; \Big|\int_K f(x)\big(\varphi_j(x) - \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq}\; \|\varphi_j - \varphi\|_{L^\infty(K)} \cdot \|f\|_{L^1(K)} \\ &\to\; 0 \quad \text{für } j \to \infty. \end{aligned}$$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, aber es gibt kein $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, so dass $T\big|_{C_0^\infty(\Omega)} = T_f$. (Selber nachweisen als Übung.)

6.5 Satz: Die Abbildung $\Phi : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) : f \mapsto T_f$ ist linear und injektiv.

Beweis: Siehe Beweis von 3.1. $\square$

6.6 Definition: **1)** Wir identifizieren $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, insbesondere $C(\Omega \to \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

2) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **regulär**, falls

$$\exists f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : T_f = T,$$

andernfalls **singulär**.

6.7 Bemerkung: $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

6.8 Beispiele: **1)** δ_{x_0} ist singulär.

2) In $\mathbb{R}^3$: $T_{1/|x|}$ ist regulär.

3) In $\mathbb{R}^1$: $T(\varphi) = \text{C.H.} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; T$ ist singulär.

6.9 Definition und Satz: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ setze

$$(D^\alpha T)(\varphi) \;:=\; (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gelten:

1) $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; D^α heißt **schwache Ableitung** oder **Distributionenableitung**,

2) $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ ist linear und stetig,

3) Für $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\Omega \to \mathbb{C})$ und $|\alpha| \le k$ gilt $D^\alpha T_f = T_{\nabla^\alpha f}$, d.h. D^α ist Fortsetzung der klassischen Ableitung ∇^α.

Beweis: **1)** **a)** $D^\alpha T$ ist wohldefiniert und linear ✓

b) $D^\alpha T$ ist stetig: $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi \;\Rightarrow\; \nabla^\alpha \varphi_j \overset{D}{\to} \nabla^\alpha \varphi$

$$\Rightarrow\; (D^\alpha T)(\varphi_j) \;=\; (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi_j) \;\to\; (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) \;=\; (D^\alpha T)(\varphi).$$

2) Stetigkeit: $T_j \to T$

$$\Rightarrow\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : (D^\alpha T_j)(\varphi) \;=\; (-1)^{|\alpha|} T_j(\nabla^\alpha \varphi) \;\to\; (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) \;=\; (D^\alpha T)(\varphi).$$

3) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$- Wähle $K \subseteq \Omega$ kompakt, so dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$.
Wähle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\psi(x) = 1$ für $x \in K$.
Setze φ und $\psi \cdot f$ durch Null fort auf $\mathbb{R}^n$ zu $\tilde{\varphi}, \tilde{f}$.

$$\begin{aligned}
(D^\alpha T_f)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} T_f(\nabla^\alpha \varphi) \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \psi(x) f(x) \nabla^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \nabla^\alpha \tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{Integration}}{\overset{\text{partielle}}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla^\alpha \tilde{f})(x) \tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\nabla^\alpha f)(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= T_{\nabla^\alpha f}(\varphi).
\end{aligned}$$

□

6.10 Bemerkung: **1)** Jede schwartzsche Distribution ist beliebig oft differenzierbar.

2) Es gilt der Satz von Schwarz: $D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T)$.

3) $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \;\Rightarrow\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha T_j \to D^\alpha T$.

4) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} T_j$ konvergent in $\mathcal{D}'(\Omega) \;\Rightarrow\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha\Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} T_j\Big) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} D^\alpha T_j$.

6.11 Definition und Satz: Sei $a \in C^\infty(\Omega \to \mathbb{C})$. Setze

$$(a \cdot T)(\varphi) \;:=\; T(a \cdot \varphi) \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gelten:

1) $a \cdot T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

2) $a \cdot T_u = T_{a \cdot u}$ für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

3) Die Abbildung $M_a : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) : T \mapsto a \cdot T$ ist stetig,

4) Leibniz-Regel:

$$D^\alpha(a \cdot T) \;=\; \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta a) \cdot D^{\alpha-\beta} T.$$

Beweis: Selber.

7 Lokales Verhalten von Distributionen

Im Folgenden $\Omega = \mathbb{R}^n$, d.h. wir betrachten $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

7.1 Definition: Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$T = S \text{ in } O \;:\Leftrightarrow\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \big(\mathrm{supp}\,(\varphi) \subseteq O \Rightarrow T(\varphi) = S(\varphi)\big).$$

7.2 Beispiele: **1)** Für $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt: $u = v$ in $O \;\Rightarrow\; T_u = T_v$ in O.

2) $\delta_{x_0} = 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$: $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \;\Rightarrow\; \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = 0$.

7.3 Satz: Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und

$$G \;:=\; \bigcup_{O \in \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}: T = 0 \text{ in } O\}} O.$$

Dann ist G offen und $T = 0$ in G.

Beweis: **1)** G offen ✓

2) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq G$

$$\operatorname{supp}(\varphi) \text{ kompakt } \Rightarrow \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} O_j \text{ mit } T = 0 \text{ in } O_j.$$

Zerlegung der Eins:

$$\exists \psi_1, \ldots, \psi_J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq O_j \;\wedge\; \sum_{j=1}^{J} \psi_j(x) = 1 \text{ für } x \in \operatorname{supp}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \; T(\varphi) \;=\; T\Big(\varphi \cdot \sum_{j=1}^{J} \psi_j\Big) \;=\; T\Big(\sum_{j=1}^{J} \varphi \cdot \psi_j\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{J} T(\underbrace{\varphi \cdot \psi_j}_{\operatorname{supp}(\ldots) \subseteq O_j}) \;=\; 0.$$

□

***7.4 Definition**:* Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\operatorname{supp}(T) \;:=\; \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{O \in \{O \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}: T=0 \text{ in } O\}} O$$

der **Träger** von T; $x \in \operatorname{supp}(T)$ heißt **wesentlicher Punkt** von T. Falls $\operatorname{supp}(T)$ kompakt, heißt T **finit**.

***7.5 Beispiele**:* **1)** $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$,

2) $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \operatorname{supp}(T_u) = \operatorname{supp}(u)$,

3) Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\operatorname{supp}(T_u) \;=\; \mathbb{R}^n \setminus \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \exists U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen } : x \in U \;\wedge\; f = 0 \text{ f.ü. in } U\big\}.$$

***7.6 Satz**:* Sei $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent

(i) T ist stetig (d.h. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$),

(ii) $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\exists k \in \mathbb{N}_0$ $\exists c > 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\big(\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \Rightarrow$

$$\Rightarrow \big|T(\varphi)\big| \leq c \max_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\big).$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Zeige: T ist stetig.

$$\begin{aligned} \varphi_j \overset{D}{\to} \varphi \;&\Rightarrow\; \exists K \text{ kompakt} : \operatorname{supp}(\varphi_j), \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \\ &\Rightarrow\; \big|T(\varphi_j) - T(\varphi)\big| \;=\; \big|T(\varphi_j - \varphi)\big| \;\leq\; c \max_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;\to\; 0 \\ &\Rightarrow\; T(\varphi_j) \to T(\varphi). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Zeige $\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i):

$$\neg\text{(ii)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists K \text{ kompakt } \forall k \in \mathbb{N}_0 \; \forall c > 0 \; \exists \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \begin{cases} \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \, \wedge \\ \big|T(\varphi)\big| > c \max\limits_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \end{cases}$$

Wähle $c := k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \exists \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq K \;\wedge\; \big|T(\varphi_k)\big| > k \max\limits_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

Setze $\psi_k := \dfrac{1}{k \cdot \max_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}\, \varphi_k$.

$$\Rightarrow \quad \big|T(\psi_k)\big| \ge 1 \;\wedge\; \|\nabla^\alpha \psi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{k} \text{ für } |\alpha| \le k \;\wedge\; \operatorname{supp}(\psi_k) \subseteq K$$

$$\Rightarrow \quad \psi_k \stackrel{D}{\to} 0 \;\wedge\; \neg\big(T(\psi_k) \to 0\big)$$

$$\Rightarrow \quad \neg\text{(i)}$$

□

***7.7 Folgerung**:* Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ finit, dann

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 \; \exists c > 0 \; \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi)\big| \le c \max_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{$*$}$$

Beweis: Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}(T)$ (kompakt, da T finit). Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$T(\varphi) \;=\; T(\psi \cdot \varphi) + T\big((1-\psi)\cdot\varphi\big) \;=\; T(\psi \cdot \varphi).$$

Wende 7.6, Teil (ii) an mit $K := \operatorname{supp}(\psi)$:

$$\big|T(\psi \cdot \varphi)\big| \;\le\; c \max_{|\alpha|\le k} \big\|\nabla^\alpha(\psi \cdot \varphi)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;\stackrel{\text{Leibniz}}{\le}\; \tilde{c} \max_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

□

***7.8 Definition**:* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt von **endlicher Ordnung**, falls $(*)$ gilt. Das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$, für das gilt:

$$\exists c > 0 \; \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \big|T(\varphi)\big| \le c \max_{|\alpha|\le k} \|\nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

heißt **Ordnung** von T.

***7.9 Beispiele**:* **1)** $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \;\Rightarrow\; \delta_{x_0}$ hat Ordnung 0.

2) $D^\alpha \delta_{x_0}$ hat Ordnung $|\alpha|$.

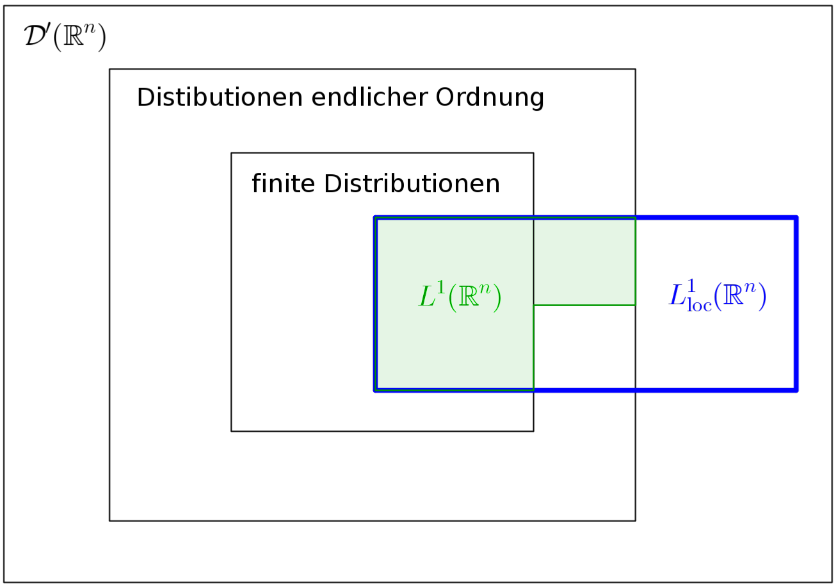
3) $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\big|T_u(\varphi)\big| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} \big|u(x)\big| \cdot \big|\varphi(x)\big| \,\mathrm{d}x \;\stackrel{\text{Hölder}}{\le}\; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$\Rightarrow\; T_u$ hat Ordnung 0.

4) $u(x) = x$ für $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist nicht von endlicher Ordnung, obwohl $D^2 T_u = 0$.

7.10 Veranschaulichung:



7.11 Bemerkung: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann

$$\exists \alpha \in \mathbb{N}_0\ \exists f \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}) : T = D^\alpha f \text{ in } O$$

(vgl. Walter).

7.12 Ableitung ist lokale Operation: Falls $T = S$ in O, so folgt $D^\alpha T = D^\alpha S$ in O für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Beweis: $\varphi \in C_0^\infty(O)\ \wedge\ \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq O\ \Rightarrow\ \nabla^\alpha \varphi \in C_0^\infty(O)\ \wedge\ \operatorname{supp}(\nabla^\alpha \varphi) \subseteq O$

$$\Rightarrow\ (D^\alpha T)(\varphi)\ =\ (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi)\ =\ (-1)^{|\alpha|} S(\nabla^\alpha \varphi)\ =\ (D^\alpha S)(\varphi).$$

$\square$

7.13 Anwendung im $\mathbb{R}^1$: Seien $u(x) = x$, $v(x) = -x$, $w(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$.

$$T_w = T_u \text{ in }]0,\infty[\ \Rightarrow\ D^1 T_w = D^1 T_u = T_{u'} \text{ in }]0,\infty[$$
$$T_w = T_v \text{ in }]-\infty,0[\ \Rightarrow\ D^1 T_w = D^1 T_v = T_{v'} \text{ in }]-\infty,0[$$

$$\Rightarrow\ D^1 T_w = T_g + S \text{ mit } g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ \text{Wert egal bei } x = 0 \end{cases} \quad \text{und } S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ mit } \operatorname{supp}(S) = \{0\}.$$

8 Direktes Produkt

8.1 Vorbemerkung: $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m),\ (\varphi_1 \times \varphi_2)(x,y) := \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$

$$\Rightarrow\ \varphi_1 \times \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}).$$

8.2 Hilfssatz: $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}),\ \psi(x) := S\big(\varphi(x,.)\big)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Dann

1) $\nabla^\alpha \psi = S\big((\nabla^{(\alpha,0)}\varphi(x,.)\big)$, insbesondere $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$,

2) $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

3) $\varphi_j \overset{D(\mathbb{R}^{n+m})}{\to} \varphi \ \Rightarrow\ \psi_j \overset{D(\mathbb{R}^n)}{\to} \psi$ (mit $\psi_j(x) := S\big(\varphi_j(x,.)\big)$).

Beweis: **1)** Nachrechnen

2) $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-R,R]^{n+m} \ \Rightarrow\ \varphi(x,y) = 0$ falls $|x| > R,\ y \in \mathbb{R}^m$
$\Rightarrow\ \operatorname{supp}(\psi) \subseteq [-R,R]^n$

3) $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq [-R,R]^{n+m} \overset{2)}{\Rightarrow} \operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq [-R,R]^n$
Wende 7.6 an mit $K = [-R,R]^m$:

$$\begin{aligned} \big|\nabla^\beta \psi_j(x) - \nabla^\beta \psi(x)\big| &\overset{1)}{=} \big|S\big(\nabla^{(\beta,0)}(\varphi_j - \varphi)(x,.)\big)\big| \\ &\leq c \max_{|\alpha|\leq k} \big\|\nabla^{(0,\alpha)}\big(\nabla^{(\beta,0)}(\varphi_j - \varphi)(x,.)\big)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \max_{|\gamma|\leq k+|\beta|} \big\|\nabla^\gamma(\varphi_j - \varphi)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

$\square$

8.3 Definition und Satz: Seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Dann ist das **direkte Produkt** $T \times S$ von T und S definiert durch

$$(T \times S)(\varphi) \ :=\ T_x\big(S_y\big(\varphi(x,y)\big)\big) \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Es gelten:

1) $T \times S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$,

2) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\ \wedge\ v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)\ \Rightarrow\ T_u \times T_v = T_{u\times v}$,

3) $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)\ \Rightarrow\ (T \times S)(\varphi_1 \times \varphi_2) = T(\varphi_1) \cdot S(\varphi_2)$,

4) $\operatorname{supp}(T \times S) = \operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)$.

Beweis: **1)** **a)** $T \times S$ ist linear ✓

b) $T \times S$ ist stetig: $\varphi_j \overset{D(\mathbb{R}^{n+m})}{\rightarrow} \varphi \overset{8.2}{\Rightarrow} S_y\big(\varphi_j(.,y)\big) \overset{D(\mathbb{R}^n)}{\rightarrow} S_y\big(\varphi(.,y)\big)$

$\Rightarrow T_x\Big(S_y\big(\varphi_j(x,y)\big)\Big) \rightarrow T_x\Big(S_y\big(\varphi(x,y)\big)\Big)$

2) Selber

3) Selber

4) **a)** Seien $(x,y) \in \operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)$ und $O \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen mit $(x,y) \in O$ beliebig, aber fest

$\Rightarrow \exists O_x \subseteq \mathbb{R}^n, O_y \subseteq \mathbb{R}^m$ offen : $x \in O_x \;\wedge\; y \in O_y \;\wedge\; O_x \times O_y \subseteq O$

$\Rightarrow \exists \varphi_x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\varphi_x) \subseteq O_x \;\wedge\; T(\varphi_x) \neq 0$

$\exists \varphi_y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) : \operatorname{supp}(\varphi_y) \subseteq O_y \;\wedge\; T(\varphi_x) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi_x \times \varphi_y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) \;\wedge\; \operatorname{supp}(\varphi_x \times \varphi_y) \subseteq O$

$\wedge\; (T \times S)(\varphi_x \times \varphi_y) \overset{3)}{=} T(\varphi_x) \cdot S(\varphi_y) \neq 0$

$\Rightarrow (x,y) \in \operatorname{supp}(T \times S)$

b) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big)$, z.B. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(T)$

$\Rightarrow \exists O_x \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $: x \in O_x \;\wedge\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq O_x \Rightarrow T(\varphi) = 0$

$\Rightarrow \forall \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) : \Big(\operatorname{supp}(\Phi) \subseteq O_x \times \mathbb{R}^m \Rightarrow (T \times S)(\Phi) = T\Big(S_y\big(\Phi(.,y)\big)\Big) = 0\Big)$

$\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(T \times S).$

□

9 Faltung

9.1 Zur Idee: $f * g(x) \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$

Aus Fubini: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Aber: $1 * 1$ geht nicht.

Abhilfe: Definiere $f * g$, falls für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\big\{y \in \mathbb{R}^n : f(a-y)g(y) \neq 0\big\} \text{ ist beschränkt}$$
$$\Leftrightarrow \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : f(x) \neq 0 \;\wedge\; g(y) \neq 0 \;\wedge\; x+y=a\big\} \text{ ist beschränkt}$$
$$\Leftrightarrow \big(\operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)\big) \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x+y=a\big\} \text{ ist beschränkt}$$

9.2 Definition: Seien $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\sigma_a := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x+y| \leq a\big\}$ für $a \geq 0$. (T,S) erfüllt die **Streifenbedingung**, falls

$$\forall a > 0 : \big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big) \cap \sigma_a \text{ ist beschränkt.}$$

9.3 Beispiel: $\operatorname{supp}(T)$ beschränkt (z.B. $T = \delta_0$) $\Rightarrow$ (T, S) erfüllt die Streifenbedingung.

9.4 Vorüberlegung: Seien $f, g, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\begin{aligned}
T_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{z=x-y}{\underset{x=y+z}{=}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y)\varphi(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(y+z)\,\mathrm{d}y}_{=T_g(\varphi(z+.))=:T_{g,y}(\varphi(z+y))}\,\mathrm{d}z \\
&= T_{f,z}\big(T_{g,y}\big(\varphi(z+y)\big)\big) \\
&= (T_f \times T_g)(\Phi) \quad \text{mit } \Phi(x,y) := \varphi(x+y).
\end{aligned}$$

Problem: Φ hat unbeschränkten Träger.

9.5 Definition und Satz: Seien $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass (T, S) die Streifenbedingung erfüllt.
Zu $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wähle a) $R > 0$, so dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$,
b) $\psi_\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\psi_\varphi = 1$ auf $\big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big) \cap \sigma_R$.
Dann wird $T * S$ definiert durch

$$(T*S)(\varphi) := (T \times S)(\psi_\varphi \cdot \Phi) \quad \text{mit } \Phi(x,y) := \varphi(x+y).$$

Dann gelten:

1) $T * S$ ist wohldefiniert (unabhängig von der Wahl von ψ_φ),

2) $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: **1)** Seien $\tilde{R} > 0$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B_{\tilde{R}}(0)$ und $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\tilde{\psi} = 1$ auf $\big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big) \cap \sigma_{\tilde{R}}$. Dann

$$\begin{aligned}
(T \times S)(\psi_\varphi \cdot \Phi) - (T \times S)(\tilde{\psi} \cdot \Phi) &= (T \times S)\big((\psi_\varphi - \tilde{\psi}) \cdot \Phi\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2) $T * S : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist linear ✓
$T * S$ ist stetig: Sei $\varphi_j \overset{D(\mathbb{R}^n)}{\to} \varphi$
Wähle $R > 0$, so dass für $j \in \mathbb{N} : \operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq K \subseteq B_R(0)$

Wähle $\psi_\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\psi_\varphi = 1$ auf $\big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big) \cap \sigma_R$, gleich für alle j.
Dann $\psi_\varphi \cdot \Phi_j \overset{D(\mathbb{R}^n)}{\to} \psi_\varphi \cdot \Phi$, denn

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}(\psi_\varphi \cdot \Phi_j) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_\varphi) \text{ kompakt} \\ \text{und} \quad &\nabla^{(\alpha,\beta)}(\Phi_j) \to \nabla^{(\alpha,\beta)}\Phi \text{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ (T \times S)(\psi_\varphi \cdot \Phi_j) \to (T \times S)(\psi_\varphi \cdot \Phi)$. □

***9.6 Beispiele**:* **1)** $T * \delta_0 = T$.

2) $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ T_{\varphi_1} * T_{\varphi_2} = T_{\varphi_1 * \varphi_2}$ (siehe 9.4).

***9.7 Eigenschaften**:* (T, S) erfülle die Streifenbedingung. Dann

1) $T * S = S * T$,

2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha(T * S) = (D^\alpha T) * S = T * D^\alpha S$.

Beweis: **1)** Wähle $\psi_\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $\psi_\varphi = 1$ auf $\big(\operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)\big) \cap \sigma_R$ so, dass $\psi_\varphi(x,y) = \psi_\varphi(y,x)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (T * S)(\varphi) &= T_x\big(S_y\big(\psi_\varphi(x,y) \cdot \varphi(x+y)\big)\big) \\ &\overset{\text{noch z.z.}}{=} S_y\big(T_x\big(\psi_\varphi(x,y) \cdot \varphi(x+y)\big)\big) \\ &= S_y\big(T_x\big(\psi_\varphi(y,x) \cdot \varphi(y+x)\big)\big) \\ &= (S * T)(\varphi) \end{aligned}$$

Für $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt: $T_x\big(S_y\big(\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)\big)\big) = T(\varphi_1) \cdot S(\varphi_2) = S_y\big(T_x\big(\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)\big)\big)$
T linear $\Rightarrow \ T_x\big(S_y\big(\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)\big)\big) = S_y\big(T_x\big(\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)\big)\big)$ gilt auch für Linearkomb.
$\mathrm{LH}\big(C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^m)\big)$ ist dicht in $D(\mathbb{R}^{2n})$ (vgl. [Walter]).

2)
$$\begin{aligned} D^\alpha(T * S)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(T * S)(\nabla^\alpha \varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(T \times S)(\psi_\varphi(x,y) \cdot \nabla^\alpha \varphi(x+y)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T_x\big(S_y\big(\nabla_y^\alpha\big(\psi_\varphi(x,y)\varphi(x+y)\big)\big)\big) \\ &= T_x\big(D^\alpha S_y\big(\psi_\varphi(x,y) \cdot \varphi(x+y)\big)\big) \\ &= (T * D^\alpha S)(\varphi). \end{aligned}$$
□

***9.8 Definition**:* **1)** Eine Ableitungsvorschrift

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha D^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

mit $k \in \mathbb{N}, \ c_\alpha \in \mathbb{C}$ heißt **linearer Differentialoperator**.

2) Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **Grundlösung** oder **Fundamentallösung** zu $P(D)$, falls

$$P(D)T \;=\; \delta_0.$$

9.9 Satz: Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ Grundlösung zu $P(D)$. Für die lineare partielle Differentialgleichung

$$P(D)U \;=\; F \qquad (*)$$

gilt: Ist $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass (T, F) die Streifenbedingung erfüllt, so ist $U := T * F$ Lösung von $(*)$ (eine „schwache Lösung").

Beweis: $P(D)(T * f) = (P(D)T) * F = \delta_0 * F = F$. □

9.10 Beispiel: $P(D) = -\Delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$T = T_u \text{ mit } u(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma_n |x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & n = 2 \end{cases}$$

($\Gamma_n :=$ Oberflächeninhalt der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$). Dann $-\Delta T = \delta_0$.
Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $T_u * T_f$ ist klassische Lösung von $-\Delta u = f$.

9.11 Fragen: **1)** Wie bestimmt man eine Grundlösung?

2) Unter welchen Voraussetzungen gilt $U = F * T \in C^k(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C})$, d.h. U ist eine „klassische" Lösung von $P(D) = F$?