Höhere Analysis (SS 2016) — Modulprüfung

Termin:	*26.09.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei allein Aufgaben sind vollständige Argumentationsschritte anzugeben.* *Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Aufgabe 1 (14 Punkte) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $g : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ eine positive Borel-messbare Funktion.

(a) Geben Sie den Satz der monotonen Konvergenz an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\nu(A) := \int_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } A \in \Sigma$$

ein Maß ν auf Σ definiert.

(c) Wir betrachten nun den Maßraum (Ω, Σ, ν) und eine einfache Funktion $s : (\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition einer einfachen Funktion s an und geben Sie die Definition von $\displaystyle\int_\Omega s \,\mathrm{d}\nu$ an.

(d) Zeigen Sie, dass für jede einfache Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(e) Zeigen Sie, dass (1) ebenfalls für jede positive Borel-messbare Funktion $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gilt.

(f) Zeigen Sie: Aus $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ folgt $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und dass (1) gilt.

Hinweis: Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der vorhergehenden Aufgabenteile verwenden, ohne sie bewiesen zu haben.

Lösung 1.

(a) Seien $f_n : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbare Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

(b) (b$_1$): Es gilt $\nu(\emptyset) = \displaystyle\int_\emptyset g\mathrm{d}\mu = 0$, da $\mu(\emptyset) = 0$.

(b$_2$) Da g positiv ist, gilt $\nu(A) \ge 0$.

(b$_3$) σ-Additivität: Seien paarweise disjunkte $A_j \in \Sigma$ gegeben. Wir definieren

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j.$$

Aus der Definition folgt $0 \le \chi_{B_1} \le \chi_{B_2} \le \dots$. Da g positiv ist, folgt insbesondere

$$0 \le g\chi_{B_1} \le g\chi_{B_2} \le \dots .$$

Also ist die positive Funktionenfolge $f_n := \chi_{B_n} g$ monoton und messbar als Produkt messbarer Funktionen und es folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \int_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} g\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} g\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n A_j} g\mathrm{d}\mu.$$

Weil die A_j paarweise disjunkt sind folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n A_j} g\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{A_j} g\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

(c) Eine Funktion $s : (\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{R}$ heißt einfach wenn es $c_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \Sigma$ gibt, so dass

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$$

und das Integral ist definiert als

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\nu := \sum_{j=1}^{n} c_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{A_j} g \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) Sei f einfache Funktion, d.h. $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, wobei $c_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \Sigma$. Hierfür folgt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \sum_{j=1}^{n} c_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{A_j} g \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j} g \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu.$$

(e) Sei f positive Borel-messbare Funktion. So wissen wir nach Satz 2.13 aus dem Skript, dass f montoner Limes einfacher Funktionen ist. Das heißt, es gibt $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, wobei s_n einfache Funktionen sind für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = f$. Wir erhalten

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu \overset{\text{Mon. Konv}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\nu \overset{\textbf{(d)}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n g \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Mon. Konv}}{=} \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu.$$

Man beachte, dass wir wie in **(b)** verwendet haben, dass $s_n g$ ein monotoner Limes gegen g ist.

(f) Sei $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$, dann ist $f_+ \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ und $f_- \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$, wobei $f = f_+ - f_-$. Wir wissen, dass $f_+ := \max\{0, f\}$ und $f_- := \max\{0, -f\}$ positive Borel-messbare Funktionen sind und erhalten dann

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f_+ \mathrm{d}\nu - \int_\Omega f_- \mathrm{d}\nu \overset{\textbf{(e)}}{=} \int_\Omega f_+ g \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_- g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu.$$

Also gilt (1) und wir wissen nach Satz 2.16 im Skript, dass $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu) \Leftrightarrow |fg| \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$. Wir verwenden Gleichung (1) für $|f|$ und erhalten

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega |f| g \, \mathrm{d}\mu \overset{g \geqq 0}{=} \int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ folgt $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Aufgabe 2 (7 Punkte) Für festes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sei die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16 \;\wedge\; 2y \geq \sin(\alpha)\sqrt{x^2 + 4y^2}\}$$

und die bijektive Abbildung

$$\Phi :]1, 2[\times]\alpha, \pi - \alpha[\to \; A : (r, \varphi) \mapsto (2r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

gegeben (die Bijektivität muss nicht nachgwiesen werden).

(a) Begründen Sie, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_A yx^2 \, \mathrm{d}\lambda^{(2)}$.

Lösung 2.

(a) Wir weisen Kriterium 3.13 aus dem Skript nach, da wir aus der Aufgabenstellung wissen, dass Φ bijektiv ist. Das heißt wir müssen zeigen, dass $\Phi \in C^1(]1,2[\times]\alpha,\pi-\alpha[)$ und $|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(r,\varphi)}\right)| \neq 0$ auf $]1,2[\times]\alpha,\pi-\alpha[$.

Φ ist offensichtlich in $C^1(]1,2[\times]\alpha,\pi-\alpha[)$, weil cos, sin und Polyonome glatte Funktionen sind und die Multiplikation glatter Funktionen wieder glatte Funktionen ergeben. Also erhalten wir sogar $\Phi \in C^\infty(]1,2[\times]\alpha,\pi-\alpha[)$. Die Jacobimatrix ist gegeben durch

$$\frac{\partial\Phi(r,\varphi)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) & -2r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow |\det\left(\frac{\partial\Phi(r,\varphi)}{\partial(r,\varphi)}\right)| = 2r > 0, \text{ da } r > 1.$$

Nach Kriterium 3.13 ist Φ damit ein C^1-Diffeomorphismus.

(b) Weil Φ ein C^1-Diffeomorphismus verwenden wir die Transformationsformel

$$\int_A f\,\mathrm{d}\lambda^{(2)} = \int_{\Phi^{-1}(A)} (f\circ\Phi)|\det\Phi|\,\mathrm{d}\lambda^{(2)}.$$

Um $\Phi^{-1}(A)$ zu berechnen setzen wir $x = 2r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$. Aus der Definition von A folgt

$$4 \le x^2 + 4y^2 \le 16 \Leftrightarrow 4 \le 4r^2\cos(\varphi) + 4r^2\sin(\varphi)^2 \le 16 \Leftrightarrow 1 \le r \le 2.$$

Die zweite Bedingung von A ergibt

$$2y \ge \sin(\alpha)\sqrt{x^2+4y^2} \Leftrightarrow \sin(\varphi) \ge \sin(\alpha).$$

Diese Bedingung ist für alle $\varphi \in]\alpha,\pi-\alpha[$ erfüllt, denn es gilt

$$\inf_{\varphi\in]\alpha,\pi-\alpha[} |\sin(\varphi)| = \inf_{\varphi\in]\alpha,\pi-\alpha[} \sin(\varphi) \ge \min\{\sin(\alpha),\sin(\pi-\alpha)\} = \sin(\alpha).$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha).$$

Mit der Transformationsformel erhalten wir dann

$$\int_A yx^2\,\mathrm{d}\lambda^{(2)} = \int_{]1,2[\times]\alpha,\pi-\alpha[} 8r^4\cos(\varphi)^2\sin(\varphi)\mathrm{d}\lambda^{(2)}$$

Wir betonen, dass wir $\int_A yx^2\,\mathrm{d}\lambda^{(2)}$ als Riemann-Integral berechnen dürfen, da yx^2 eine stetige Funktion ist und dass der Satz von Fubini gilt, (was am Endergbnis klar wird, da der Integrand positiv ist).

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_A yx^2\,\mathrm{d}\lambda^{(2)} = 8\int_1^2 r^4 dr \int_\alpha^{\pi-\alpha} \cos(\varphi)^2\sin(\varphi)d\varphi &= \frac{8\cdot 31}{5\cdot 3}[-\cos(\varphi)^3]_\alpha^{\pi-\alpha} \\ &= \frac{8\cdot 31}{5\cdot 3}(\cos(\alpha)^3 - \cos(\pi-\alpha)^3) = \frac{16\cdot 31}{5\cdot 3}(\cos(\alpha)^3.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \pi - |x|$ für $x \in [-\pi, \pi[$, 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

(a) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(b) Geben Sie das Kriterium von Dini an der Stelle x_0 an und überprüfen Sie, ob die Bedingung im Punkt $x_0 = 0$ erfüllt ist.

(c) Beweisen Sie die folgende Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(d) Für f kann man nachweisen, dass $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$ für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt. Was folgt für die Konvergenz der Fourierreihe?

Lösung 3.

(a) f ist achsensymmetrisch, daher hat die Fourierreihe von f folgende Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx), \quad \text{mit } a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(jt)\, dt, \ \forall\, j \in \mathbb{N}_0.$$

Wir berechnen zuerst

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(jt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi - x\, dt = \pi$$

und nun betrachten wir für $j \in \mathbb{N}$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(jt)\, dt \overset{\text{part.Int.}}{=} \frac{2}{j\pi} \int_0^{\pi} \sin(jt)\, dt = \frac{2}{j^2\pi} [-\cos(jt)]_0^{\pi} = \frac{2}{j^2\pi}((-1)^{j+1} + 1).$$

Also ist die Fourierreihe von f

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}((-1)^{j+1} + 1) \cos(jx) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos((2j+1)x).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$. Das Kriterium von Dini im Punkt x_0 ist, dann

$$\exists \delta > 0 \ : \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n(x_0) = f(x_0),$$

wobei s_n die n-te partielle Summe der Fourierreihe von f bezeichne.

Offensichtlich ist $f(x) = \pi - |x| \in L^1(]-\pi, \pi[)$, da $|f(x)| \leq \pi$. Das Kriterium von Dini im Punkt $x_0 = 0$ lautet für $\delta > 0$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t) - f(0}{t} \right| dt = 2 \int_0^{\delta} \left| \frac{t}{t} \right| dt = 2\delta < \infty.$$

(c) Wir wissen aus der vorherigen Aufgabenteil, dass

$$\lim_{n\to\infty} s_n(0) = f(0),$$

da das Kriterium von Dini erfüllt ist. Also erhalten wir aus der Rechnung in Teilaufgabe **a)** folgendes

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}\cos((2j+1)0) = f(0) = \pi,$$

woraus folgt

$$\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Multiplikation mit $\pi/4$ ergibt das gewünschte Ergebnis.

(d) f ist Lipschitzstetig. Also folgt nach dem Kriterium von Lipschitz (Satz 1.10 im Skript), dass s_n gleichmäßig gegen f konvergiert auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Geben Sie die Definition der schwachen Ableitung $D^\alpha T$ an.

(b) Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und beschränkt,

$$F(x) := \begin{cases} g(x), & \text{für } x \le 0 \\ h(x), & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} g'(x), & \text{für } x \le 0 \\ h'(x), & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

und $T_F, T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die induzierten Distributionen. Zeigen Sie, dass $D^1 T_F - T_f = \big(h(0) - g(0)\big)\delta_0$ gilt.

Lösung 4.

(a) Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist die schwache Ableitung $D^\alpha T$ definiert durch

$$D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi), \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

(b) Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach Definition

$$D^1 T_F(\varphi) = -\int_0^\infty h(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 g(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Partielles Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} D^1 T_F(\varphi) &= -[h(x)\varphi(x)]_0^\infty - [g(x)\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_0^\infty h'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 g'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -[h(x)\varphi(x)]_0^\infty - [g(x)\varphi(x)]_{-\infty}^0 + T_f(\varphi). \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass h beschränkt ist und dass $|x\varphi(x)|$ beschränkt ist, da $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Also gibt es ein $C > 0$ mit

$$\lim_{x\to\infty} |h(x)\varphi(x)| = \lim_{x\to\infty} \frac{|h(x)\varphi(x)x|}{|x|} \leq C \lim_{x\to\infty} |x|^{-1} = 0.$$

Analog wird gezeigt, dass

$$\lim_{x\to-\infty} |g(x)\varphi(x)| = 0.$$

Also erhalten wird

$$D^1 T_F(\varphi) = (h(0) - g(0)\varphi(0)) + T_f(\varphi) = (h(0) - g(0))\delta_0(\varphi) + T_f(\varphi),$$

woraus sofort $D^1 T_F - T_f = \big(h(0) - g(0)\big)\delta_0$ folgt.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_j, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Geben Sie die Definition von $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$ an.

(b) Geben Sie die Definition von $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ an.

(c) Es sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $T_u(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda^{(n)}$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass T_u eine schwartzsche Distribution ist.

Lösung 5.

(a) Auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die D-Konvergenz folgendermaßen definiert:

$$\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt, so dass } \forall j \in \mathbb{N} \ \mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq K, \text{ und} \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \ ||\nabla^\alpha \varphi_j - \nabla^\alpha \varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ für } j \to \infty. \end{array}$$

(b) Es gilt

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ : \ u \text{ ist messbar und } \forall K \subseteq \mathbb{R}^n : K \text{ kompakt} \Rightarrow u|_K \in L^1(K) \right\}.$$

Hinweis: Im Skript steht u anstatt $u|_K$.

(c) T_n ist wohldefiniert: Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt und deshalb

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \ = \ \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda^{(n)} \in \mathbb{C}$$

Die Linearität von T_u folgt aus der Linearität des Integrals.

Wir müssen daher nur noch zeigen, falls $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$ für $\varphi, \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $T_u(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} T_u(\varphi)$.

Sei daher $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$ für $\varphi, \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Es reicht folgendes zu zeigen

$$\lim_{j\to\infty} T_u(\varphi_j) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\lambda^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\lambda^{(n)} = T_u(\varphi).$$

Wir wissen aus der Definition der D-Konvergenz, dass

$$\exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt, so dass } \forall j \in \mathbb{N} \ \mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq K$$

und für $\alpha = 0$ haben wir die gleichmäßige Konvergenz von φ_j gegen φ auf $\mathbb{R}^n$.

1. Möglichkeit :

Wir betrachten

$$|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(\varphi_j(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}| \overset{\operatorname{supp}(\varphi_j)\subseteq K}{\leq} \int_K |u(x)||\varphi_j(x) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}$$
$$\leq ||\varphi_j - \varphi||_{L^\infty(K)} \int_K |u(x)|\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}.$$

Da φ_j gegen φ gleichmäßige auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert, folgt

$$\lim_{j\to\infty} T_u(\varphi_j) = T_u(\varphi).$$

2. Möglichkeit :

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt

$$\exists c > 0, \forall j \in \mathbb{N} \ : \ ||\varphi_j||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c.$$

Dann gilt nun folgende Abschätzung

$$|u(x)\varphi_j(x)| \overset{\operatorname{supp}(\varphi_j)\subseteq K}{=} \chi_K |u(x)\varphi_j(x)| \leq c|u(x)|\chi_K$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist die rechte Funktion eine integrable Majorante auf $\mathbb{R}^n$. Also verwenden wir den Satz von der majorisierten Konvergenz und erhalten

$$\lim_{j\to\infty} T_u(\varphi_j) = T_u(\varphi).$$