Höhere Analysis (SS 2016) — Modulprüfung

Termin:	*26.09.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei allein Aufgaben sind vollständige Argumentationsschritte anzugeben.* *Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Aufgabe 1 (14 Punkte) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei $g : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ eine positive Borel-messbare Funktion.

(a) Geben Sie den Satz der monotonen Konvergenz an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\nu(A) := \int_A g \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für } A \in \Sigma$$

ein Maß ν auf Σ definiert.

(c) Wir betrachten nun den Maßraum (Ω, Σ, ν) und eine einfache Funktion $s : (\Omega, \Sigma, \nu) \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition einer einfachen Funktion s an und geben Sie die Definition von $\displaystyle\int_\Omega s \, \mathrm{d}\nu$ an.

(d) Zeigen Sie, dass für jede einfache Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(e) Zeigen Sie, dass (1) ebenfalls für jede positive Borel-messbare Funktion $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gilt.

(f) Zeigen Sie: Aus $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ folgt $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und dass (1) gilt.

Hinweis: Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der vorhergehenden Aufgabenteile verwenden, ohne sie bewiesen zu haben.

Aufgabe 2 (7 Punkte) Für festes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sei die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16 \ \wedge \ 2y \geq \sin(\alpha)\sqrt{x^2 + 4y^2}\}$$

und die bijektive Abbildung

$$\Phi :]1, 2[\times]\alpha, \pi - \alpha[\to \ A : (r, \varphi) \mapsto (2r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

gegeben (die Bijektivität muss nicht nachgwiesen werden).

(a) Begründen Sie, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_A yx^2 \, \mathrm{d}\lambda^{(2)}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \pi - |x|$ für $x \in [-\pi, \pi[$, 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

(a) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(b) Geben Sie das Kriterium von Dini an der Stelle x_0 an und überprüfen Sie, ob die Bedingung im Punkt $x_0 = 0$ erfüllt ist.

(c) Beweisen Sie die folgende Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(d) Für f kann man nachweisen, dass $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$ für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt. Was folgt für die Konvergenz der Fourierreihe?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Geben Sie die Definition der schwachen Ableitung $D^\alpha T$ an.

(b) Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und beschränkt,

$$F(x) := \begin{cases} g(x), & \text{für } x \leq 0 \\ h(x), & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} g'(x), & \text{für } x \leq 0 \\ h'(x), & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

und $T_F, T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die induzierten Distributionen. Zeigen Sie, dass $D^1 T_F - T_f = \big(h(0) - g(0)\big)\delta_0$ gilt.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_j, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Geben Sie die Definition von $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi$ an.

(b) Geben Sie die Definition von $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ an.

(c) Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $T_u(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}\lambda^{(1)}$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass T_u eine schwartzsche Distribution ist.