

Höhere Analysis (SS 2016) — Scheinklausur

Termin: 1.06.2015

Hinweise: Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
Außer bei **Aufgabe 1** sind bei allen Aufgaben die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.

Bei der Aufgabe 1 werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.

Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.

Hilfsmittel: **Keine** außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.

Bearbeitungszeit: 90 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Gruppen-Nr.:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ

Aufgabe 1 (7 Punkte) Es seien $f, g, f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu^{(1)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kreuzen Sie an welche der folgende Aussagen **wahr** oder **falsch** sind:

	wahr	falsch
$\int_{\mathbb{R}} f d\mu^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} g d\mu^{(1)} \Rightarrow f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}$.		
$\int_{A_1} f d\mu^{(1)} = \int_{A_1} g d\mu^{(1)}$ für alle $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}$.		
Es gilt $f _{A_1} \in L^1(A_1, \mathcal{B}(A_1), \mu^{(1)} _{\mathcal{B}(A_1)})$.		
$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \int_{A_1} f d\mu^{(1)} \leq \int_{A_2} f d\mu^{(1)}$.		
Die Funktion $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist messbar auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.		
Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, so ist f beschränkt auf $\mathbb{R}$.		
Das Mengensystem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle Intervalle.		

Aufgabe 2 (7 Punkte) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$B := \left\{]0, \infty[,]-1, 1[,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[,]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[,]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \dots \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

gegeben und $\sigma(B)$ sei die von B erzeugte σ -Algebra.

(a) Begründen Sie, dass das Intervall $] - \infty, 0[$ in $\sigma(B)$ enthalten ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f : (\mathbb{R}, \sigma(B)) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

Borel-messbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Ergänzen Sie folgende Aussage: Eine Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Element von $L^4(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0, 1[)})$, wenn

(b) Gegeben ist die Funktion

$$f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{1/5}}.$$

Weisen Sie nach, dass f in $L^4(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0, 1[)})$ enthalten ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sind $\Omega =]1, \infty[$ und gegeben ist die folgende Funktionenfolge $f_n : (]1, \infty[, \mathcal{B}(]1, \infty[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]1, \infty[)}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } 1 < x \leq n, \\ 0, & \text{falls } x > n. \end{cases}$$

- (a) Begründen Sie, warum $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen für den Satz von der monotonen Konvergenz erfüllt.
- (b) Berechnen Sie durch Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz das Integral

$$\int_{]1, \infty[} \frac{1}{x} d\lambda_x^{(1)}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind $\Omega =]0, 1[$ und die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := 1 + (1 - e^{-x^2})^n$$

- (a) Geben Sie den punktweisen Grenzwert von f_n an.
- (b) Geben Sie eine Funktion $g \in L^1(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0, 1[)})$ an, so dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (c) Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\lambda^{(1)}.$$

Welchen Satz verwenden Sie?

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^2 + y^2) d\lambda_{(x,y)}^{(2)}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

- (a) Geben Sie die Höldersche Ungleichung an.
- (b) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < p' < \infty$

$$L^{p'}(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

gilt.