Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Höhere Analysis (SS 2016) — Scheinklausur

Termin:	*1.06.2015*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Außer bei* ***Aufgabe 1*** *sind bei allein Aufgaben die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung jeweils ein Extrablatt.* *Bei der Aufgabe 1 werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	Σ

Aufgabe 1 (? Punkte) Es seien $f, g, f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu^{(1)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kreuzen Sie an welche der folgende Aussagen **wahr** oder **falsch** sind:

	wahr	falsch
$\int_{\mathbb{R}} f d\mu^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} g d\mu^{(1)} \Rightarrow f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}$.		x
$\int_{A_1} f d\mu^{(1)} = \int_{A_1} g d\mu^{(1)}$ für alle $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f = g$ fast überall auf $\mathbb{R}$.	x	
Es gilt $f\|_{A_1} \in L^1(A_1, \mathcal{B}(A_1), \mu^{(1)}\|_{\mathcal{B}(A_1)})$.	x	
$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \int_{A_1} f d\mu^{(1)} \leq \int_{A_2} f d\mu^{(1)}$.		x
Die Funktion $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ ist messbar auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.	x	
Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, so ist f beschränkt auf $\mathbb{R}$.		x
Das Mengensystem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle Intervalle.	x	

Aufgabe 2 (7 Punkte) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$B := \left\{]0,\infty[\,,\ ]-1,1[\,,\ ]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\,,\ ]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[\,,\ ]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[, \dots \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

gegeben und $\sigma(B)$ sei die von B erzeugte σ-Algebra.

(a) Begründen Sie, dass das Intervall $]-\infty, 0[$ in $\sigma(B)$ enthalten ist.

(b) Weisen Sie nach, das die Funktion

$$f : \big(\mathbb{R}, \sigma(B)\big) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

Borel-messbar ist.

Lösung 2.

(a) Weil $\sigma(B)$ die kleinste σ-Algebra ist, die B enthält, wissen wir dass Komplemente, abzählbare Schnitte und abzählbare Vereinigungen von Mengen aus B wieder in $\sigma(B)$ enthalten sind. Also sind folgende Mengen

$$(0,\infty)^c = (-\infty, 0],$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$$

enthalten in $\sigma(B)$. Also ist auch $\mathbb{R} \setminus \{0\} \in \sigma(B)$, was folgendes ergibt

$$(-\infty, 0) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (-\infty, 0] \in \sigma(B).$$

(b) Die Funktion f lässt sich schreiben als

$$f = -1 \cdot \chi_{(-\infty,0)} + 0 \cdot \chi_{\{0\}} + 1 \cdot \chi_{(0,\infty)}.$$

Alle drei Funktionen sind messbare Funktionen, weil wir in **(a)** gezeigt haben, dass

$$(-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty) \in \sigma(B).$$

Weil die Summe von messbaren Funktionen wieder messbar ist, ist f auch messbar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Ergänzen Sie folgende Aussage: Eine Funktion $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ ist genau dann Element von $L^4\big(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0,1[)}\big)$, wenn ....

(b) Gegeben ist die Funktion

$$f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{1/5}}.$$

Weisen Sie nach, dass f in $L^4\big(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0,1[)}\big)$ enthalten ist.

Lösung 3.

(a) Eine Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ ist genau dann Element von $L^4(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0,1[)})$, wenn f messbar ist und

$$\int_{]0,1[} |f(x)|^4 d\lambda_x^{(1)} < \infty.$$

(b) Offensichtlich ist f messbar, da die Funktion stetig ist auf $]0,1[$. Wegen der Stetigkeit lässt sich das Integral als Riemann-Integral auffassen und wir erhalten

$$\int_{]0,1[} |x^{-1/5}|^4 d\lambda_x^{(1)} = \int_0^1 x^{-4/5} dx = 5[x^{1/5}]_0^1 = 5 < \infty.$$

Also ist $f \in L^4(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0,1[)})$.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sind $\Omega =]1,\infty[$ und gegeben ist die folgende Funktionenfolge $f_n :\ (]1,\infty[, \mathcal{B}(]1,\infty[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]1,\infty[)}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } 1 < x \leq n, \\ 0, & \text{falls } x > n. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, warum $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen für den Satz von der monotonen Konvergenz erfüllt.

(b) Berechnen Sie durch Anwendung des Satzes der monotonen Konvergenz das Integral

$$\int_{]1,\infty[} \frac{1}{x}\, d\lambda_x^{(1)}.$$

Lösung 4.

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht offensichtlich aus messbaren Funktionen, da

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \chi_{(1,n])} + 0 \cdot \chi_{(n,\infty)}.$$

Die Funktionen auf der rechten Seite sind messbar, weil $\frac{1}{x}$ stetig ist auf $]1,\infty[$ und die Intervalle der charakteristischen Funktionen messbar sind. Wir brauchen noch, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist in n. Dazu zeigen wir $0 \le f_n \le f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fallunterscheidung:
Falls $x \in (1,n]$, dann gilt $f_n(x) = \frac{1}{x} = f_{n+1}(x)$.
Falls $x \in (n,n+1]$, dann gilt $f_n(x) = 0 \le \frac{1}{x} = f_{n+1}(x)$.
Falls $x \in (n+1,\infty)$, dann gilt $f_n(x) = 0 = f_{n+1}(x)$.

Daraus folgt $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x \in]1,\infty)$, was alle Voraussetzungen des Satzes der Monotonen Konvergenz waren.

(b) Wir verwenden den Satz von der Monotonen Konvergenz und erhalten

$$\int_{]1,\infty[} \frac{1}{x}\, d\lambda_x^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{]1,\infty[} f_n(x) d\lambda_x^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{]1,n]} \frac{1}{x} d\lambda_x^{(1)}.$$

Weil $\frac{1}{x}$ stetig ist auf $]1,\infty[$ können wir das Integral auf der rechten Seite als Riemann-Integral auffassen und erhalten dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]1,n]} \frac{1}{x} d\lambda^{(1)}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind $\Omega =]0,1[$ und die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := 1 + (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^n$$

(a) Geben Sie den punktweisen Grenzwert von f_n an.

(b) Geben Sie eine Funktion $g \in L^1\big(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda^{(1)}|_{\mathcal{B}(]0,1[)}\big)$ an, so dass $|f_n| \le g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\lambda^{(1)}.$$

Welchen Satz verwenden Sie?

Lösung 5.

(a) Da $x \in]0,1[$ folgt

$$1 > (1 - \mathrm{e}^{-x^2}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^n = 0.$$

Also ist die Grenzfunktion für $x \in]0,1[$ gegeben durch $f(x) := 1$.

(b) Für $x \in]0,1[$ betrachten wir

$$|1 + (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^n| = 1 + (1 - \mathrm{e}^{-x^2})^n \leq 1 + 1^n = 2.$$

Wir wählen daher $g(x) := 2$ für alle $x \in]0,1][$.

(c) Weil f_n stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, ist f_n messbar. Aus **(a)** wissen wir, dass g ein integrable Majorante ist. Wir verwenden daher den Satz der Majorisierten Konvergenz und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\lambda_x^{(1)} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda_x^{(1)} = \int_\Omega 1 \, d\lambda_x^{(1)} = \lambda^{(1)}(\Omega) = \lambda^{(1)}(]0,1[) = 1.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0, y \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^2 + y^2) d\lambda_{(x,y)}^{(2)}$$

Lösung 6.
Wir verwenden Polarkoordinaten

$$\Phi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

wobei $r \in (0,\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ und berechnen die Jacobi-Matrix und die Funktionaldeterminante von Φ:

$$J\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J\Phi(r,\varphi)| = r.$$

Wir verwenden nun den Transformationssatz und erhalten

$$\int_D (x^2 + y^2) d\lambda_{(x,y)}^{(2)} = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^3 \left((r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2\right) r dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_1^3 r^3 dr = \frac{\pi}{8}[r^4]_1^3 = 10\pi.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Geben Sie die Höldersche Ungleichung an.

(b) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < p' < \infty$

$$L^{p'}(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

gilt.

Lösung 7.

(a) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q,$$

wobei $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu), g \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $|| \cdot ||_p$ die Norm von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ bezeichne.

(b) 1. Möglichkeit:
Wir wenden die Hölderungleichung an, wobei $\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=1$ für $l>1$ gelte

$$\int_\Omega 1\cdot|f|^p d\mu \le \left(\int_\Omega 1 d\mu\right)^{1/l'}\left(\int_\Omega |f|^{pl}d\mu\right)^{1/l}.$$

Wir wählen $l=\frac{p'}{p}>1$ und erhalten

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \le \left(\int_\Omega 1 d\mu\right)^{1/l'}\left(\int_\Omega |f|^{p'}d\mu\right)^{p/p'} = \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{p'}}\left(\int_\Omega |f|^{p'}d\mu\right)^{p/p'}.$$

Daraus folgt, falls $f\in L^{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$, dann ist $f\in L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$.
2. Möglichkeit:
Wir definieren

$$A:=\{x\in\Omega : |f(x)|\le 1\}$$

und betrachten

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_{A^c}|f|^p d\mu \le \int_A 1 d\mu + \int_{A^c}|f|^p d\mu \le \mu(\Omega) + \int_{A^c}|f|^{p'}d\mu.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $1<|f|$ auf A^c und daher $|f|^p\le|f|^{p'}$ gilt, wegen $1\le p<p'$.
Daraus folgt, dann

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \le \mu(\Omega) + \int_\Omega |f|^{p'}d\mu.$$