Themen zur Prüfung Analysis III

Kapitel 1:

- Kontrahierende Abbildungen und Banachscher Fixpunktsatz
- Satz über implizite Funktionen, Existenz der Umkehrabbildung
- Extrema unter Nebenbedingungen

Kapitel 2:

- Separierbare, exakte, Ählichkeits-Differentialgleichung
- Satz von Picard-Lindelöf
- Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen: Fundamentalsystem, Wronski-Determinante, Variation der Konstanten, lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten.
- Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung: Fundamentalsystem, Wronski-Determinante, Reduktion der Ordnung, Variation der Konstanten, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Kapitel 3:

- Definition des Riemann- und des Darboux-Integrals über Intervallen im $\mathbb{R}^d$, Satz von Fubini,
- Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen, Kriterien für Integrierbarkeit, Eigenschaften des Riemann-Integrals (auch Monotonie bzgl. Menge),
- Integral über projizierbare Mengen, Fubini für Jordan-messbare Mengen, Satz von Cavalieri, Transformationssatz.

Kapitel 4:

- Kurven: Parameterdarstellung, Rektifizierbarkeit, Länge, Bogenlängendarstellung, Kurvenintegral, Wegintegral, Wegunabhängigkeit von Wegintegralen,
- Flächen: Parameterdarstellung, Tangentialraum, Tangentialebene, Normalenvektor, Rand einer Fläche, Flächeninhalt, Flächenintegral,
- Integralsätze von Green und Gauß in der Ebene in Greenschen Bereichen, Integralsätze von Stokes und von Gauß im $\mathbb{R}^3$.

Alte Klausuraufgaben

Dies ist eine Auswahl und deckt nicht den ganzen Prüfungsstoff ab!

0.1. (Klausur Analysis II, 15.2.2016)
Zeigen Sie, dass das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2^3 \\ x_2 &= y_1^2 - 2\mathrm{e}^{y_2} \end{aligned}$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ im Punkt $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -2, 0, 0)$ lokal nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung der auflösenden Funktion in diesem Punkt.

0.2. (Klausur Analysis II, 15.2.2016)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Begründen Sie, dass der Raum $C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ versehen mit der Norm

$$||f||_\infty := \max \{|f(x)| \,:\, x \in [0, \tfrac{1}{2}]\}$$

vollständig ist.

(c) Zeigen Sie durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes in einem geeigneten normierten Raum, dass die Integralgleichung

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

genau eine Lösung $f \in C([0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R})$ besitzt.

0.3. (Klausur Analysis II, 1.10.2015)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Wir betrachten f eingeschränkt auf $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$. Warum besitzt $f|_{\mathbb{S}^1}$ einen größten und einen kleinsten Wert? Berechnen Sie diese mit Hilfe eines Lagrangeansatzes und geben Sie die Art und Lage der Extrema an.

0.4. (Klausur Analysis III, 30.3.2016)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2x\, \mathrm{e}^{y - x^2}, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung in Abhängigkeit von $y_0 \in \mathbb{R}$ an.

(c) Die Differentialgleichung in obigem Anfangswertproblem besitzt die Form

$$y' = f(x, y)$$

mit einer stetigen Fuktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Welche zusätzliche Voraussetzung muss f erfüllen, damit für das Anfangswertproblem in jedem Quadrat

$$\mathcal{Q} := [-1, 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$$

der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist?
Prüfen Sie diese Voraussetzung für das gegebene Anfangswertproblem.

0.5. (Klausur Analysis III, 30.3.2016)
Gegeben sei das Vektorfeld

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x(\cos y)^2 \\ y - (\sin y)(\cos y) \\ z + x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren betrachten wir die Flächen

$$F_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 4,\ z = 0\},$$
$$F_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0\}.$$

(a) Skizzieren Sie beide Flächen.

(b) Bestimmen Sie die drei Integrale

$$\text{(i)} \quad \int_{F_1} A \cdot n \, d\sigma, \qquad \text{(ii)} \quad \int_V \operatorname{div} A \, dx, \qquad \text{(iii)} \quad \int_{F_2} A \cdot n \, d\sigma.$$

In (ii) sei V das von den beiden Flächen eingeschlossene Volumen, in (i) und (iii) seinen die Normalenvektoren n jeweils so orientiert, dass sie bzgl. V nach außen zeigen.

0.6. (Klausur Analysis III, 5.10.2016)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}\, y' + \frac{2}{x^2}\, y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 0. \tag{1}$$

(a) Die gegebene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y_1(x) = ax + b$ mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine solche Lösung.

(b) Führen Sie die Substitution $y(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ mit eine der Lösungen y_1 aus Teilaufgabe **(a)** durch und lösen Sie anschließend die Differentialgleichung für y_2.

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem für (1) an und berechnen Sie die zugehörige Wronskideterminante.

(d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}\, y' + \frac{2}{x^2}\, y = x\, \mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

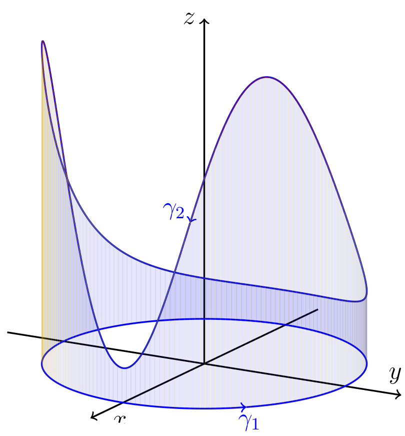
0.7. (Klausur Analysis III, 5.10.2016)
Gegeben sei das Vektorfeld

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren betrachten wir die Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 1 + y^2 \mathrm{e}^x\}$$

(vgl. Skizze). γ_1 bezeichne den unteren Rand von F, γ_2 den oberen, die Orientierung beider Randkurven entnehme man ebenfalls der Skizze.



(a) Parametrisieren Sie die Fläche und zeigen Sie, dass die z-Komponente des Normalenvektors von F verschwindet.

(b) Bestimmen Sie die drei Integrale

$$\text{(i)} \quad \int_F \operatorname{rot} A \cdot n \, d\sigma, \qquad \text{(ii)} \quad \int_{\gamma_1} A \cdot T \, ds, \qquad \text{(iii)} \quad \int_{\gamma_2} A \cdot T \, ds.$$

0.8. (Klausur Höhere Analysis, 26.9.2016)
Für festes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sei die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16 \ \wedge \ 2y \geq \sin(\alpha)\sqrt{x^2 + 4y^2}\}$$

und die bijektive Abbildung

$$\Phi :]1, 2[\times]\alpha, \pi - \alpha[\to \ A : (r, \varphi) \mapsto (2r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

gegeben (die Bijektivität muss nicht nachgwiesen werden).

(a) Begründen Sie, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_A yx^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

0.9. (Klausur Höhere Analysis, 1.2.2017)
Sei $U :=]1, \infty[\times] - \pi, \pi[\times]0, \infty[$. Wir betrachten den folgenden C^1-Diffeomorphismus

$$T : U \to \mathbb{R}^3; \ (r, \varphi, \theta) \mapsto (\theta r\cos(\varphi), \theta r\sin(\varphi), \sqrt{r^2 - 1}).$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante von T.

(b) Sei

$$H := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < z < 2, \ \frac{1}{2}(1 + z^2) < x^2 + y^2 < 2(1 + z^2)\right\}.$$

Berechnen Sie $T^{-1}(H)$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_H x^2 z \,\mathrm{d}(x, y, z)$.