Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**		**Übungsgruppe oder Tutor(in):**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/3	/5	/3	/3	/3	/4	/5	/6	/32

Bitte unbedingt beachten:

- **Bearbeitungszeit: 90 Minuten**
- **Erlaubte Hilfsmittel: keine**, insbesondere keine Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Bei den **Aufgaben 7 und 8** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter. Bei den **Aufgaben 1-6** wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt, Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- In dieser Klausur können bis zu **32 Punkte** erreicht werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*3 Punkte*)

a) Gegeben ist ein metrischer Raum (M, d) und eine Abbildung $f\colon M \to M$. Geben Sie die Bedingung an, die erfüllt sein muss, damit f eine Kontraktion ist:

b) Gegeben ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{4}y\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}y\right) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f ist eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik (braucht nicht nachgewiesen zu werden). Was folgt durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes?

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Kreuzen Sie an, welcher Typ von Differentialgleichung vorliegt.
Hinweise: Für falsche Kreuze gibt es Minuspunkte, es sind auch mehrere Kreuze pro Differentialgleichung möglich.

	separierbare Dgl	lineare Dgl	Ähnlichkeitsdgl	exakte Dgl
$y' + \sin(x) = 0$				
$y' + y^2 \sin(x) = 0$				
$y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0$				
$y' + \frac{3y}{x} = 0$				
$x\cos(xy)y' + y\cos(xy) + 1 = 0$				
$x^2 y' + \mathrm{e}^x y = \sin(x)$				

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Tragen Sie ein: W für wahr, F für falsch.
Hinweis: Bei falschen Antworten gibt es Minuspunkte!

a) Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Extremstelle der Funktion $f|_N$ auf der Menge
$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\},$$
so sind die Vektoren $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig. ☐

b) Hat eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n verschiedene reelle Eigenwerte, so ist jede Lösung $y \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ der Form $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} v$ für einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwert λ von A. ☐

c) Seien $b \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Konvergiert jede Lösung $y \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ der inhomogenen Differentialgleichung ☐
$$y' = Ay + b(x),$$
gegen den selben Vektor $y_* \in \mathbb{R}^n$ für $x \to \infty$, so haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Eine Lösung $y_1 \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ der linearen Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 2y' + 4y = 0, \tag{1}$$

ist gegeben durch $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

a) Geben Sie zwei weitere Lösungen $y_2, y_3 \in C^3(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ an, so dass $\{y_1, y_2, y_3\}$ ein reelles Fundamentalsystem von (1) bildet:

$y_2(x) =$ $\boxed{}$

$y_3(x) =$ $\boxed{}$

b) Schreiben Sie die Differentialgleichung (1) in ein äquivalentes System erster Ordnung um:

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0,$$

besitzt das Fundamentalsystem $\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\right\}$. Geben Sie den Ansatz und das zugehörige Gleichungssystem für Variation der Konstanten für die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = f(x)$$

an.

Ansatz: $y(x) =$

Zugehöriges Gleichungssystem:

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Geben Sie für das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y,$$

zwei linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$ an:

$y_1(x) = \boxed{}$ $\qquad$ $y_2(x) = \boxed{}$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = xy^2, \qquad y(0) = 2. \tag{2}$$

a) Beweisen Sie durch Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf in $Q = [-1, 1] \times [1, 3]$, dass (2) eine eindeutige lokale Lösung besitzt.

b) Bestimmen Sie die Lösung von (2).

c) Ist die in Teilaufgabe b) gefundene Lösung von (2) global?

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Sei die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz,$$

und sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre.

a) Begründen Sie, dass die Funktion $f|_S$ auf S ein Maximum und ein Minimum annimmt.

b) Bestimmen Sie den Maximum- und den Minimumwert von $f|_S$ auf S.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter.