2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Einführung

1) In einer Tasse sei heißer Tee mit Temperatur $y(t)$ ($t =$ Zeit), die Außentemperatur $y_{\text{außen}}$ sei konstant.

Physik: Der Verlauf von $y(t)$ ist bestimmt durch:

a) Anfangstemperatur y_0: $y(0) = y_0$,

b) Abfließen der Wärme: $$\underbrace{y'(t)}_{\text{Änderung der Temperatur}} = - \underbrace{\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big)}_{\text{abfließende Wärme } (\alpha > 0)}$$

Mathematik:

Zu b) Seien $\alpha, y_{\text{außen}} \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big)$$

besitzt die Lösungen $y(t) = c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + y_{\text{außen}}$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig):
Einsetzen:

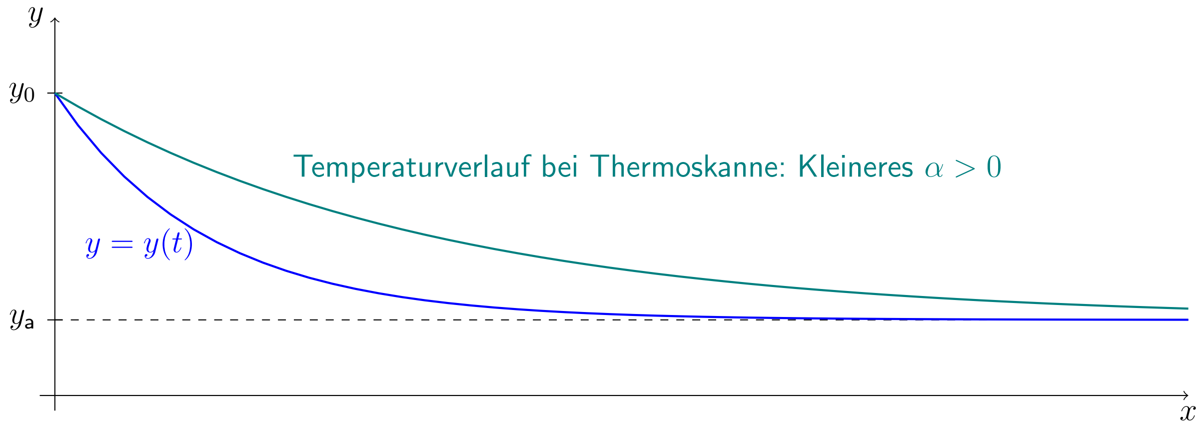
$$\left.\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & y'(t) = -\alpha c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \\ \text{rechte Seite:} & -\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big) = -\alpha c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{stimmt} \\ \text{überein}\end{array}$$

Zu a) $y_0 \stackrel{!}{=} y(0) = c\,\mathrm{e}^0 + y_{\text{außen}} = c + y_{\text{außen}} \;\Rightarrow\; c = y_0 - y_{\text{außen}}$

Mathematik bestätigt Physik:

Sind $\alpha, y_{\text{außen}}, y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so ist der Temperaturverlauf eindeutig:

$$y(t) \;=\; (y_0 - y_{\text{außen}})\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + y_{\text{außen}}.$$



Beobachtung Die Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen. Die Anfangsbedingung $y(0) = y_{\text{außen}}$ „wählt" die richtige aus.

Für eine eindeutige Lösung werden Differentialgleichung und Anfangsbedingung benötigt.

2) Senkrechter Wurf (eines Steins) nach oben: Sei $y(t)$ die Höhe des Steins über dem See.
Physik: Beschreibung der Bewegung $y(t)$ durch

a) Startpunkt $\quad y(0) = h$

b) Startgeschwindigkeit $\quad y'(0) = v$

c) Einwirkung der Gewichtskraft: $\quad \underbrace{m\,y''(t)}_{\text{Trägheitskraft}} = \underbrace{-m\,g}_{\text{Gewichtskraft}}$

Mathematik:

Zu c) $y''(t) = -g \;\Leftrightarrow\; y'(t) = -g\,t + c_1 \;\Leftrightarrow\; y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + c_1\,t + c_2.$

Die Differentialgleichung besitzt unendlich viele Lösungen

$$y(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + c_1\,t + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Zu a) $h \stackrel{!}{=} y(0) = -\frac{1}{2}\,g \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = h$

Zu b) $v \stackrel{!}{=} y'(0) = -g \cdot 0 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = v.$

Mathematik bestätigt Physik: Sind g, h, v bekannt, so ist die Lösung

$$y(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v\,t + h$$

eindeutig.

Beobachtung: Die Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen. Die Anfangsbedingung $y(0) = h \;\wedge\; y'(0) = v$ „wählt“ die richtige aus.

Für eine eindeutige Lösung werden Differentialgleichung und Anfangsbedingung benötigt.

2.1 Definition *(vorläufig):* Seien $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

1) Die Gleichung

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) \;=\; 0 \qquad \text{für } x \in I \tag{D}$$

für die unbekannte Funktion y heißt **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung**.

2) Ist (D) nach $y^{(n)}$ auflösbar, so heißt

$$y^{(n)}(x) \;=\; f\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \qquad \text{für } x \in I \tag{$\widetilde{\mathrm{D}}$}$$

explizite gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

3) Ist $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$, so dass (D) bzw. ($\widetilde{\mathrm{D}}$) erfüllt ist. so heißt y **Lösung**.

4) Seien $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ gegeben. Die Bedingung

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \;\ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{AB}$$

heißt **Anfangsbedingung** (n-ter Ordnung).

5) (D) $\wedge$ (AB) bzw. ($\widetilde{\mathrm{D}}$) $\wedge$ (AB) heißt **Anfangswertproblem** (n-ter Ordnung).

2.2 Bemerkungen: **1)** n-ter Ordnung: Die höchste auftretende Ableitung ist $y^{(n)}$.

2) Die Differentialgleichung heißt gewöhnlich, weil y nur von $x \in \mathbb{R}^1$ abhängt (Falls $y = y(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2$: partielle Differentialgleichung).

3) Abkürzende Schreibweise: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

4) Es gibt keine allgemeine Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen. Im Folgenden: Verfahren für einige spezielle Typen von Differentialgleichungen und ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

2.3 Beispiele: **1)** $y' = 2xy,\ y(0) = -1$: Lösung $y(x) = -\mathrm{e}^{x^2}$.

Beobachtungen:

a) Die Lösung ist für $x < x_0 = 0$ und für $x > x_0$ definiert. Oft wird kein Intervall für die Differentialgleichung angegeben. Bei Konstruktion der Lösung wird das Intervall mitgeliefert.

b) Die Lösung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$: **globale Lösung**.

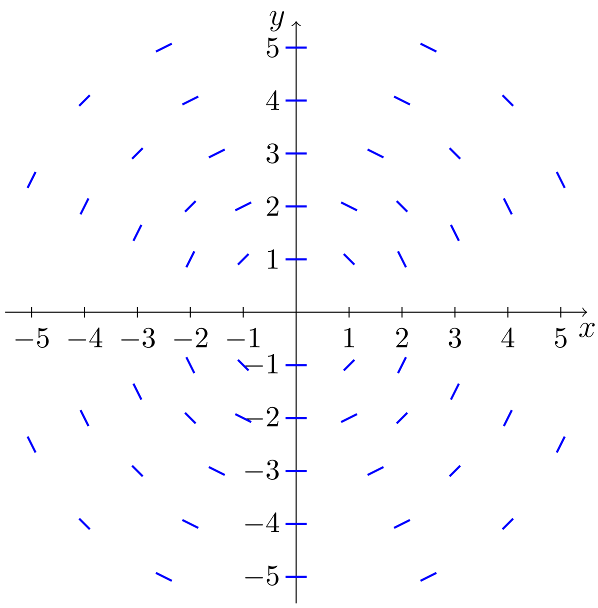
2) $y' = 1 + y^2,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1$,
Lösung $y(x) = \tan x$ für $x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$I \neq \mathbb{R}$: **lokale Lösung**.

2.4 Geometrische Veranschaulichung: Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

hat im Punkt (x_0, y_0) die Steigung $y' = f(x_0, y_0)$. Die Differentialgleichung ordnet also jedem Punkt (x, y) eine Steigung $f(x, y)$ zu. Die Lösungen der Differentialgleichung sind die Funktionen, die in jedem Punkten die richtige Steigung besitzen.

Z.B. $y' = -\dfrac{x}{y}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$



Die eingezeichneten Steigungen bilden ein **Richtungsfeld**. Man kann dadurch den Lösungsverlauf evtl. „erraten“ oder numerisch berechnen.

Vermutung:

$$y(x) = \sqrt{c - x^2} \qquad \text{für } c > 0,\ |x| < \sqrt{c},$$
$$y(x) = -\sqrt{c - x^2} \qquad \text{für } c > 0,\ |x| < \sqrt{c}.$$

Probe:

$$y'(x) = \pm \frac{1}{2\sqrt{c - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{y}.$$

2.2 Ein paar Lösungsmethoden

2.5 Nur integrieren:

$$y^{(n)} = f(x) \text{ mit } f \in C([a,b] \to \mathbb{R}).$$

n-Mal integrieren liefert alle Lösungen der Differentialgleichung.

2.6 Definition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$y' = f(y) \cdot g(x)$$

heißt **separierbare Differentialgleichung**.

2.7 Beispiele:

$y' = \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos y}_{f(y)}$ ist separierbar

$y' = 1 + y^2 = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{(1+y^2)}_{f(y)}$ ist separierbar

$y' = 2x + \cos y$ ist nicht separierbar

2.8 Trennung/Separation der Variablen: Gegeben sei die separierbare Differentialgleichung $y' = f(y) \cdot g(x)$.

1) Konstante Lösungen: Für welche $\eta \in D(f)$ gilt $f(\eta) = 0$?

$f(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; y = \text{const} = \eta$ ist Lösung.

2) Sei $y(x) \notin \{\eta \in D(f) : f(\eta) = 0\}$.

$$\begin{aligned}
y' = f(y)\,g(x) \;&\Leftrightarrow\; \frac{y'}{f(y)} = g(x) \qquad \text{(Variablen getrennt!)} \\
&\Leftrightarrow\; \underbrace{\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}\,\mathrm{d}x}_{\overset{u=y(x)}{\underset{\mathrm{d}u=y'(x)\mathrm{d}x}{=}} \left[\int \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u\right]_{u=y(x)}}
\end{aligned}$$

Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$: $H'(u) = \frac{1}{f(u)}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; H(y(x)) = \int g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow\; y(x) = H^{-1}\Big(\int g(x)\,\mathrm{d}x\Big)
\end{aligned}$$

(Da $H'(u) = \frac{1}{f(u)} \neq 0$, ist H lokal streng monoton, also lokal invertierbar)

Benötigte Voraussetzungen: $\frac{1}{f}$ und g müssen eine Stammfunktion besitzen.

Also „Kochrezept“ für die separierbare Differentialgleichung $y'(x) = f(y) \cdot g(x)$:

I) $f(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = \eta$ ist konstante Lösung. **nicht vergessen!**

II) Für $y \notin \{\text{Nullstellen von } f\}$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y) \cdot g(x) \\ \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} &= \int g(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Löse entstehende Gleichung nach y auf.

III) Allgemeine Lösung aus I) und II).

IV) Mit der Anfangsbedingung aus der allgemeinen Lösung die richtige Lösung auswählen.

2.9 Beispiele: **1)** $y' = \underbrace{-x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(y-1)^2}_{f(y)}$:

I) $f(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 1$
$\Rightarrow$ Einzige konstante Lösung $y(x) = 1$

II) $y \neq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{dx} &= -x(y-1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} &= -\int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y-1} + c &= -\frac{x^2}{2} + d, \quad c, d \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad y - 1 &= \frac{1}{\frac{x^2}{2} + d} = \frac{2}{x^2 + 2d}, \quad d \in \mathbb{R},\; x^2 \neq -2d \\ \Leftrightarrow \quad y(x) &= 1 + \frac{2}{x^2 + 2d}, \quad d \in \mathbb{R},\; x^2 \neq -2d \end{aligned}$$

III) Alle Lösungen: $y(x) = 1$ oder
$y = \frac{2}{x^2 + 2d}$, $d \in \mathbb{R}$

IV) Für die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$:

Fall $\boldsymbol{y_0 = 1}$: Gesuchte Lösung ist $y(x) = 1$.

Fall $\boldsymbol{y_0 \neq 0}$:

$$\begin{aligned} y_0 &\stackrel{!}{=} 1 + \frac{2}{x_0^2 + 2d} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y_0 - 1} &= \frac{x_0^2 + 2d}{2} = \frac{x_0^2}{2} + d \\ \Leftrightarrow \quad d &= \frac{1}{y_0 - 1} - \frac{x_0^2}{2} \end{aligned}$$

d existiert und ist eindeutig
$\Rightarrow$ Einzige Lösung mit $y(x_0) = y_0$:

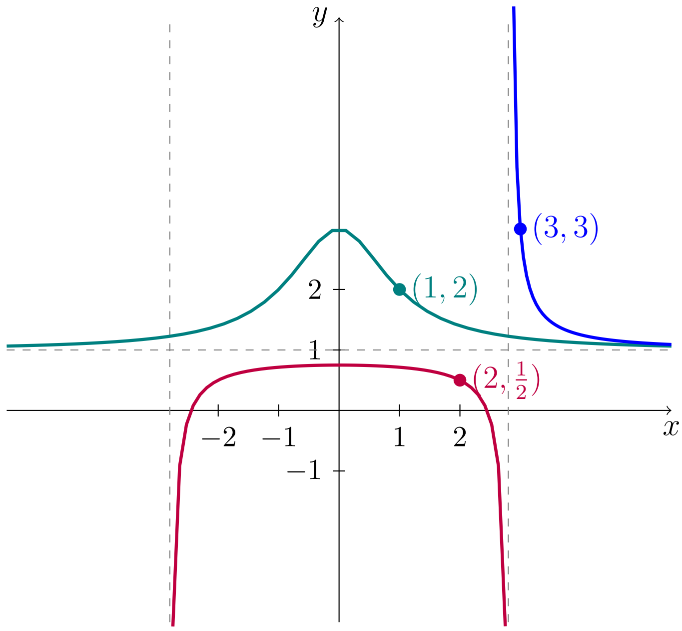
$$y(x) = \frac{2}{x^2 - x_0^2 + \frac{2}{y_0 - 1}}$$

Achtung: Der Definitionsbereich der Lösung hängt von x_0, y_0 ab, siehe unten.

Z.B. $(x_0, y_0) = (1, 2)$
$\Rightarrow \; y(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$ für $x \in \mathbb{R}$
Diese Lösung ist global.

Z.B. $(x_0, y_0) = (3, 3)$
$\Rightarrow \; y(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2-8}$ für $x > \sqrt{8}$
Dies ist eine lokale Lösung

Z.B. $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$
$\Rightarrow \; y(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2-8}$
für $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$
Dies ist eine lokale Lösung



Beobachtung: Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Lösung, d.h. für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; -x\,y^2 \quad \wedge \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung.

2) $y' \;=\; |y-1|^{1/2} \;=\; \underbrace{1}_{=g(x)} \cdot \underbrace{|y-1|^{1/2}}_{=f(y)}:$

Allgemeine Lösung:
$$\begin{aligned} y(x) &= 1 && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ y(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x+c)^2 && \text{für } x > -c \; (c \in \mathbb{R}) \\ y(x) &= 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2 && \text{für } x < -c \; (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y(1) = 2$:
$\Rightarrow \; c = 1, \; y(x) = 1 + \frac{1}{4}(x+1)^2$ für $x > -1$

Lösungen aneinanderkleben: Setze

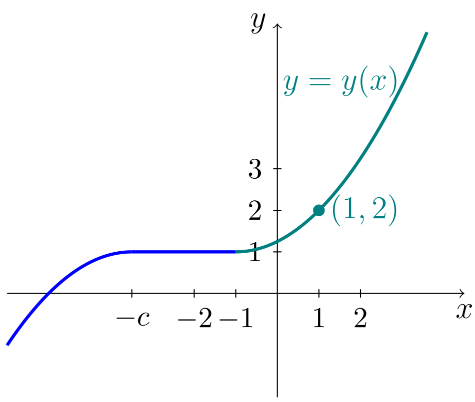
$$y_c(x) \;:=\; \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}\,(x+1)^2 & \text{für } x > -1, \\ 1 & \text{für } -c \le x \le -1, \\ 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2 & \text{für } x < -c \end{cases}$$

$(c > 1$ beliebig).

$\Rightarrow \; y \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}), \; y(1) = 2, \; y' = \sqrt{|y-1|}.$

$\Rightarrow$ Alle Funktionen y_c lösen das AWP

$$y' = \sqrt{|y-1|}, \;\; y(1) = 2.$$



Beobachtungen:

a) Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft mindestens eine Lösung.

b) Für $y_0 \neq 1$ ist die Lösung des AWP in einer Umgebung von x_0 eindeutig (lokale Eindeutigkeit).

c) Global gesehen besitzt das AWP unendlich viele Lösungen.

2.10 Heuristik: Ist $y \in C^1(]a,b[\to \mathbb{R})$ eine lokale Auflösung von

$$h\big(x, y(x)\big) \;=\; c$$

und ist h differenzierbar, so folgt mit Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h\big(x, y(x)\big) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \partial_x h\big(x, y(x)\big) + \partial_y h\big(x, y(x)\big) y'(x) \;=\; 0.$$

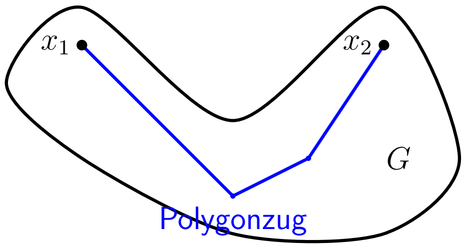
Umgekehrt: Ist y Lösung der letzten Differentialgleichung, so folgt $h\big(x, y(x)\big) = c$.

2.11 Definition: Sei $D(h) \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $h \in C^1\big(D(h) \to \mathbb{R}\big)$. Die Dgl

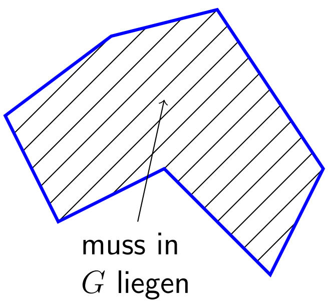
$$\partial_x h(x,y) + \partial_y h(x,y) y' \;=\; 0$$

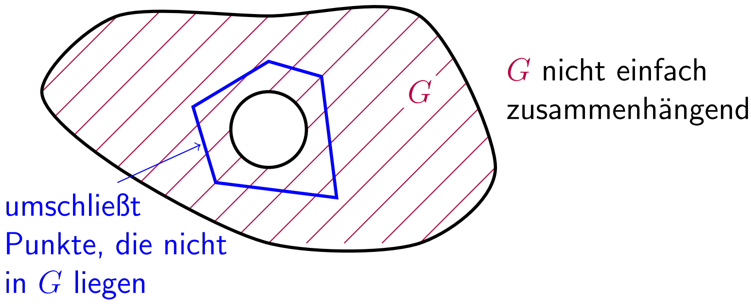
für die unbekannte Funktion y heißt **exakte Differentialgleichung**. Lösungen dieser Dgl erhält man durch Auflösen von $h\big(x, y(x)\big) = c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.

2.12 Definition *(vorläufig)*: **1)** $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und wegzusammenhängend ist, d.h. zu beliebigen Punkten $x_1, x_2 \in G$ ein Polygonzug (endliche Aneinanderfügung von Strecken) existiert, der x_1 und x_2 verbindet und in G verläuft.



2) Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jeder kreuzungsfreie geschlossene Polygonzug in G nur Elemente von G umschließt.





2.13 Kriterium für Exaktheit: Seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f, g \in C^1(G \to \mathbb{R})$. Die Dgl

$$f(x,y) + g(x,y)y' \;=\; 0 \tag{$*$}$$

ist genau dann exakt, wenn

$$\partial_y f \;=\; \partial_x g \text{ in } G. \tag{$**$}$$

Zum Beweis: Zeige: $(*)$ exakt $\Rightarrow$ $(**)$.

$(*)$ exakt $\Rightarrow \exists h \in C^1(G \to \mathbb{R}) : \partial_x h = f \;\wedge\; \partial_y h = g$
$f, g \in C^1(G \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; h \in C^2(G \to \mathbb{R})$
$\Rightarrow\; \partial_y f = \partial_y(\partial_x h) \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Satz von}}{=}} \partial_x(\partial_y h) \;=\; \partial_x g.$

Rückrichtung: Später in Vektoranalysis: h ist ein Potential für $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : G \to \mathbb{R}^2$.

2.14 Beipiele: **1)** $\underbrace{2x + y\mathrm{e}^{xy}}_{=f(x,y)} + \underbrace{x\mathrm{e}^{xy}}_{=g(x,y)}\, y'(x) = 0$

a)
$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_y f &=& \mathrm{e}^{xy} + y\mathrm{e}^{xy}x \\ \partial_x g &=& \mathrm{e}^{xy} + x\mathrm{e}^{xy}y \end{array}\right\} \Rightarrow\; \partial_y f = \partial_x g \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ Dgl ist exakt

b) Berechne h:

$$\begin{array}{rrcl} & \partial_x h &=& f \;=\; 2x + y\mathrm{e}^{xy} \\ \Rightarrow & h(x,y) &=& x^2 + \mathrm{e}^{xy} + c(y) \\ \Rightarrow & \partial_y h(x,y) &=& \mathrm{e}^{xy}x + c'(y) \overset{!}{=} g(x,y) \;=\; x\mathrm{e}^{xy} \\ \Rightarrow & c'(y) &=& 0, \text{ also } c = \text{konst} \\ \Rightarrow & \multicolumn{3}{l}{\text{Wähle } h(x,y) = x^2 + \mathrm{e}^{xy} \text{ (nicht eindeutig)}} \end{array}$$

c) Lösung der Dgl: $h(x,y) = c$ auflösen:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & x^2 + \mathrm{e}^{xy} &=& c,\; c > 0 \\ \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{xy} &=& c - x^2,\; c > 0,\; x^2 < c \\ \Leftrightarrow & xy &=& \ln(c - x^2),\; c > 0,\; x^2 < c \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{3}{l}{\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \;\wedge\; c = 1 \text{ bringt keine Lösung} \\ y = \frac{1}{x}\ln(c - x^2),\; c > 0,\; x^2 < c,\; x \neq 0 \end{array} \right.} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Alle so berechenbaren Lösungen:

$$y(x) \;=\; \frac{1}{x}\ln(c - x^2),\; c > 0,\; x \in\,]-\sqrt{c}, 0[\text{ oder } x \in\,]0, \sqrt{c}[.$$

2) $\underbrace{xy^2 + y}_{=f} \underbrace{-x}_{=g}\, y' = 0$

Diese Dgl ist nicht exakt:

$$\partial_y f = 2xy + 1 \neq \partial_x g = -1.$$

Abhilfe: Multiplikation mit $\dfrac{1}{y^2}$

Achtung: Dadurch fällt die Lösung $y = 0$ weg.

$\Rightarrow\; (\widetilde{D})\; \underbrace{x + \dfrac{1}{y}}_{=\tilde{f}} \underbrace{-\dfrac{x}{y^2}}_{=\tilde{g}}\, y' = 0$

$\Rightarrow\; \partial_y \tilde{f} = -\dfrac{1}{y^2} = \partial_x \tilde{g}$ auf $G = \big\{(x,y) : y > 0\big\}$

$\Rightarrow\; (\widetilde{D})$ ist exakt auf G,

2.15 Definition: Seien $O \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f, g \in C(O \to \mathbb{R})$. Ist $\lambda \in C\big(O \to \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ gegeben, so dass die Dgl

$$\lambda(x,y) \cdot f(x,y) + \lambda(x,y) \cdot g(x,y) \cdot y' \;=\; 0$$

exakt ist, so heißt λ **integrierender Faktor** für die Dgl $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$.
Achtung: Durch Multiplikation der Dgl mit λ können Lösunge wegfallen oder neue Lösungen dazukommen.

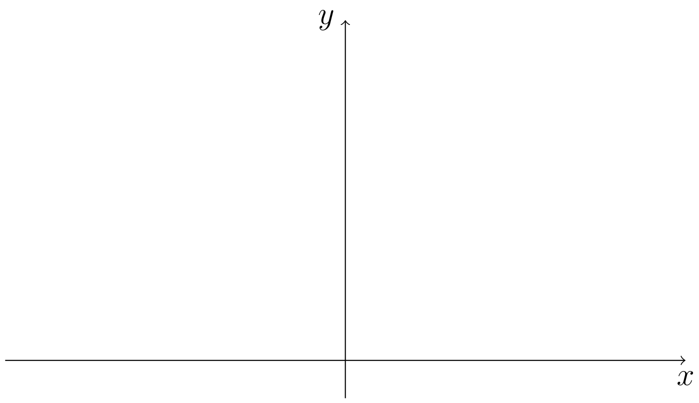
Bemerkung: Sind $f, g \in C(O \to \mathbb{R})$ mit $f(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) \neq 0$ (d.h. $(x_0, y_0) \in O$ ist **regulärer Punkt** der Differentialgleichung $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$), so kann die Existenz eines integrierenden Faktors λ bewiesen werden. Die Kunst besteht darin, λ zu finden.Tipp: Zunächst $\lambda = \lambda(x)$ oder $\lambda = \lambda(y)$ probieren.

2.16 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$:

1) Ist $y \in C^1(]a,b[) \to \mathbb{R})$ Lösung, dann auch $\tilde{y} : x \mapsto \frac{1}{\alpha} y(\alpha x)$:

$$\tilde{y}\,' \;=\; \frac{1}{\alpha} y'(\alpha x)\alpha \;=\; y'(\alpha x) \;\overset{y'=f(\frac{y}{x})}{=}\; f\left(\frac{y(\alpha x)}{\alpha x}\right) \;=\; f\left(\frac{\tilde{y}(x)}{x}\right).$$

Geometrisch: Der Graph von $\tilde{y}$ entsteht aus dem Graphen von y durch zentrische Streckung mit Zentrum $(0,0)$ und Streckfaktor $\frac{1}{\alpha}$: $\big(x, y(x)\big) \mapsto \big(\frac{x}{\alpha}, \frac{y(x)}{\alpha}\big) = \big(\frac{x}{\alpha}, \tilde{y}\big(\frac{x}{\alpha}\big)\big) = \big(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})\big)$.



2) Lösung durch Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$: Ist $y \in C^1(]a,b[\to \mathbb{R})$ mit $y' = f\big(\frac{y}{x}\big)$, so folgt

$$\begin{aligned} u' \;&=\; \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} \;=\; \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) \;=\; \frac{1}{x}\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\right) \\ \Leftrightarrow\; u' \;&=\; \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right) \end{aligned}$$

Hurra! Die entstehende Differentialgleichung ist separierbar.

Also Lösungsverfahren für $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:
- Setze $u := \dfrac{y}{x}$,
- löse Differentialgleichung $u' = \dfrac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$,
- Rücksubstitution $y(x) = x \cdot u(x)$.

2.17 Beispiel: $y' = \dfrac{yx+y^2}{x^2} = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ (nicht separierbar).

$u := \dfrac{y}{x} \ \Rightarrow \ u' = \dfrac{1}{x}(u+u^2-u) = \dfrac{1}{x}\cdot u^2.$

Allgemeine Lösung $u(x)=0$ oder $u(x) = -\dfrac{1}{\ln|x|+c}$ $(c\in\mathbb{R}),\ x\notin\{0,\pm e^c\}$.

Rücksubstitution $\Rightarrow$ Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$y(x)=0 \text{ oder } y(x) = -\frac{x}{\ln|x|+c},\ (c\in\mathbb{R}),\ x\notin\{0,\pm e^c\}.$$

2.18 Die Jacobische Differentialgleichung $\boldsymbol{y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$:

($a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ gegeben)

Fall 1: $\alpha=\beta=0$, also $y'=f(Ax+By+C)$:

Die Substitution $u(x) := Ax+By(x)+C$ führt auf

$$u' \ = \ A+By' = A+Bf(u) \qquad \text{(separierbar).}$$

Fall 2: $\alpha\neq 0$ oder $\beta\neq 0$

Fall 2a: $\det\begin{pmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \ \exists\lambda\in\mathbb{R}: \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ (Zeilen sind linear abhängig)

$\Rightarrow \ a=\lambda\alpha\wedge b=\lambda\beta$

In Dgl: $y' = f\left(\dfrac{\lambda\alpha\, x+\lambda\beta\, y+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Substitution $u := \alpha x+\beta y \ \Rightarrow \ u' = \alpha+\beta y' = \alpha+\beta f\left(\dfrac{\lambda u+c}{u+\gamma}\right)$ (separierbar)

Fall 2b: $\det\begin{pmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\neq 0$. Ziel: c,γ wegtransformieren.

Setze $\tilde{x} := x+\xi,\ \tilde{y} := y+\eta$ bzw. $y=\tilde{y}-\eta,\ x=\tilde{x}-\xi$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} \ &= \ \frac{a\,(\tilde{x}-\xi)+b\,(\tilde{y}-\eta)+c}{\alpha\,(\tilde{x}-\xi)+\beta\,(\tilde{y}-\eta)+\gamma}\\ &= \ \frac{a\,\tilde{x}+b\,\tilde{y}+c-a\,\xi-b\,\eta}{\alpha\,\tilde{x}+\beta\,\tilde{y}+\gamma-\alpha\,\xi-\beta\,\eta}\\ &= \ \frac{a\,\tilde{x}+b\,\tilde{y}}{\alpha\,\tilde{x}+\beta\,\tilde{y}} \qquad \text{falls} \qquad \begin{matrix} a\xi+b\eta=c\\ \alpha\xi+\beta\eta=\gamma\end{matrix}\end{aligned}$$

Seien ξ,η Lösung dieses LGS (existiert wegen $\begin{vmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\neq 0$).

Welche Differentialgleichung erfüllt $u(\tilde{x}) := \tilde{y}(\tilde{x}-\xi) = \tilde{y}(x)$?

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tilde{x}} = \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tilde{x}} = y'(x-\xi)\cdot 1 = f\left(\frac{a\tilde{x}+bu}{\alpha\tilde{x}+bu}\right) \overset{\text{falls } \tilde{x}\neq 0}{=} f\left(\frac{a+b\frac{u}{\tilde{x}}}{\alpha+\beta\frac{u}{\tilde{x}}}\right)$$

Dies ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.

2.19 Beispiele: **1)** $y' = -\dfrac{4x+3y-1}{3x+4y+1}$: $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 16-9 = 7 \neq 0$

Löse $\left.\begin{array}{rcr} 4\,\xi{+}3\,\eta & = & -1 \\ 3\,\xi{+}4\,\eta & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi = -1,\ \eta = 1$

Transformation $\tilde{x} = x-1,\ \tilde{y} = y+1$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = -\frac{4\,\tilde{x}+3\,\tilde{y}}{3\,\tilde{x}+4\,\tilde{y}} \overset{\text{falls } \tilde{x}\neq 0}{=} -\frac{4+3\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{3+4\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}$$

Lösung als Übung.

2) $y' = \dfrac{1}{x+2y+3}$.

$$u := x+2y+3 \quad \Rightarrow \quad u' = 1+\frac{2}{u} = \frac{u+2}{u}.$$

Konstante Lösung: $u(x) = -2$

Für $u \neq 2$:

$$\int \frac{u+2-2}{u+2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{d}x} \;\Leftrightarrow\; u - 2\ln(u+2) = x+c$$

Diese Gleichung ist nicht explizit nach u auflösbar!

2.3 Existenz und Eindeutigkeit

2.20 Vektorwertige Funktionen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

- Differentialrechnung: f ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn alle Koordinaten von f in x_0 differenzierbar sind. Es gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_d'(x_0) \end{pmatrix}.$$

- Riemann-Integral: Definiert man das Integral von f über I durch Riemannsummen im $\mathbb{R}^d$, so ergibt sich, dass f genau dann über I integrierbar ist, wenn jede Koordinate $f_1, \ldots, f_d$ über I integrierbar sind. Es gilt

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_I f_d(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

- Es gilt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, so ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

auf $[a,b]$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$. (In $x = a$ rechtsseitige, in $x = b$ linksseitige Ableitung.)

Nach Hadamard ist ein Problem korrekt gestellt, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

1) Existenz: Das Problem besitzt eine Lösung

2) Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig

3) Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Daten ab

2.21 Hauptsatz über lokale Existenz (Picard (1890), Lindelöf (1894)): Seien $d \in \mathbb{N}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $a, b > 0$,

$$f \in C(Q \to \mathbb{R}^d) \quad \text{mit } Q := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |x - x_0| \leq a \wedge \|y - y_0\|_\infty \leq b\}$$

($\|(y_1, \ldots, y_d)^T\|_\infty = \max\{|y_j| : j = 1, \ldots, d\}$), und f genüge einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y:

$$\exists L > 0 \ \forall (x,y), (x, \tilde{y}) \in Q : \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\|_\infty < L \|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

Ferner seien

$$\begin{aligned} K &:= \max\{\|f(x,y)\|_\infty : (x,y) \in Q\} \ > \ 0, \\ \alpha &:= \min\left\{a, \frac{b}{K}\right\}. \end{aligned}$$

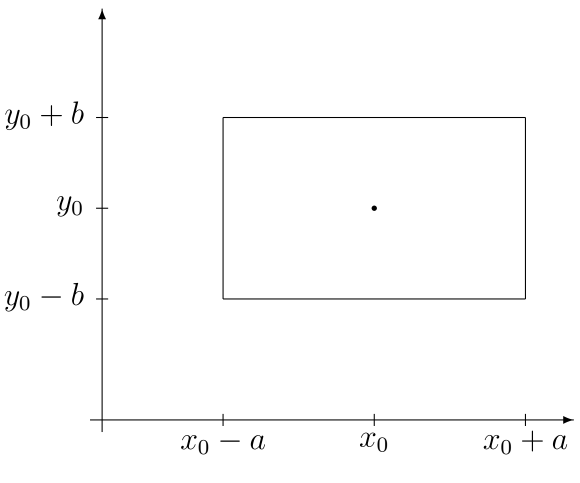
Dann besitzt das Anfangswertproblem

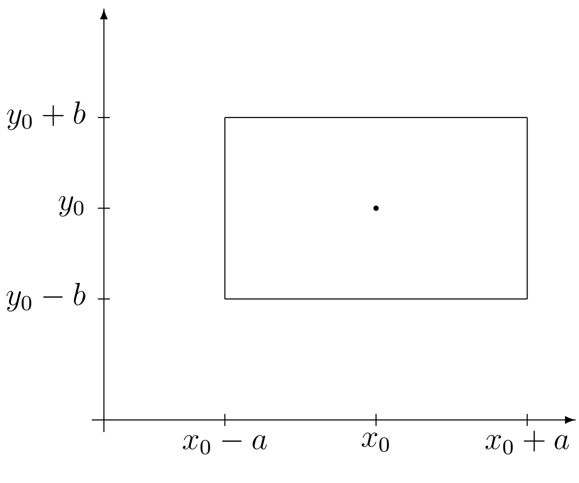
$$y' = f(x,y) \ \wedge \ y(x_0) = y_0 \tag{AWP}$$

eine eindeutige lokale Lösung $y \in C^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d)$.

2.22 Bemerkungen: **1)** Ist $d \geq 2$, so heißt die Dgl $y' = f(x,y)$ auch **Differentialgleichungssystem**.

2) Veranschaulichung der Definition von α im Fall $d = 1$:





Wegen $|y'| \leq M$ befindet sich die Lösung in Q.

3) Ist $f \in C^1(Q \to \mathbb{R}^d)$, so erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung: Für $j = 1, \ldots, d$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|f_j(x,y) - f_j(x,\tilde{y})\big| &\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\text{der Diffrechnung}}{=}} \Big|\sum_{k=1}^{d} \partial_k f_j(x,\eta_k)(y_k - \tilde{y}_k)\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} \big|\partial_k f_j(x,\eta_k)\big| \|y - \tilde{y}\|_\infty \\
&\leq L\|y - \tilde{y}\|_\infty
\end{aligned}$$

mit $L := \max\limits_{(x,y)\in Q,\ 1\leq k\leq d} \sum\limits_{k=1}^{d} \big|\partial_k f_j(x,\eta_k)\big|$.

Beweis: von 2.21: Sei $I := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

1) Äquivalente Integralgleichung:

$$y \in C(I \to \mathbb{R}^d) \ \wedge \ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in I. \tag{IG}$$

a) Sei $y \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$ Lösung von (AWP)

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in C(I \to \mathbb{R}^d) \\ y(x) - y_0 \overset{\text{(AWP)}}{=} y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(AWP)}}{=} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ y erfüllt (IG)

b) y erfüllt (IG)

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} f(x, y(x)) \overset{f,y \text{ stetig}}{\Rightarrow} y' \in C(I \to \mathbb{R}^d), \text{ also } y \in C^1(I \to \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ y erfüllt (AWP)

2) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes:

a) Wahl des metrischen Raumes: Sei

$$\begin{aligned}
M &:= \big\{g \in C(I \to \mathbb{R}^d) : \max_{x\in I} \|g(x) - y_0\|_\infty \leq b\big\} \\
\|g\| &:= \max_{x\in I} \underbrace{\mathrm{e}^{-2L|x-x_0|}}_{\leq 1,\ \geq \mathrm{e}^{-2La}} \|g(x)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Dann ist $\big(M, \|.\|\big)$ ein vollständiger normierter Raum: Konvergenz bezüglich $\|.\|$ bedeutet koordinatenweise gleichmäßige Konvergenz.

b) Setze

$$F : M \to M : g \mapsto h \text{ mit } h(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

F ist wohldefiniert:

- $h \in C(I \to \mathbb{R}^d)$ ✓

- $$\begin{aligned} |h_j(x) - (y_0)_j| &= \Big| \int_{x_0}^{x} f_j\big(t, g(t)\big)\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le \Big| \int_{x_0}^{x} \underbrace{\big|f_j\big(t, g(t)\big)\big|}_{\le K}\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\overset{|x-x_0|\le\alpha}{\le} \alpha K \\ &\le b \quad \text{für } j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

  $\Rightarrow\ \|h(x) - y_0\|_\infty \le b$ für $x \in I$.

Insgesamt folgt $h \in M$.

c) F ist Kontraktion: Für $f, g \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \big\|F(g)(x) - f(h)(x)\|_\infty &= \Big\| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, g(t)) - f(t, h(t))\big)\,\mathrm{d}t \Big\|_\infty \\ &\le \Big| \int_{x_0}^{x} \big\|f(t, g(t)) - f(t, h(t))\big\|_\infty\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le \Big| \int_{x_0}^{x} L\|g(t) - h(t)\|_\infty\,\mathrm{e}^{-2L|t-x_0|}\,\mathrm{e}^{+2L|t-x_0|}\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le L\|g-h\| \Big| \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{2L|t-x_0|}\,\mathrm{d}t \Big| \\ &= L\|g-h\| \frac{1}{2L}\big(\mathrm{e}^{2L|x-x_0|} - 1\big) \\ &\le \frac{1}{2}\|g-h\|\,\mathrm{e}^{2L|x-x_0|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \|F(g) - F(h)\| = \max_{x\in I} \mathrm{e}^{-2L|x-x_0|}\big\|F(g(x)) - F(h(x))\big\|_\infty \le \frac{1}{2}\|g-h\|.$$

d) Banachscher Fixpunktsatz: $\exists!\, y \in M : F(y) = y$.
Mit Schritt 1 folgt die Behauptung.

□

2.23 Folgerung: Seien $-\infty < a < b < \infty$, $x_0 \in \,]a, b[$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ mit

$$K \;:=\; \sup\big\{\|f(x, y)\|_\infty : a \le x \le b \;\wedge\; y \in \mathbb{R}^d\big\} \;<\; \infty,$$

und f genüge in $Q := [a, b] \times \mathbb{R}^d$ einer Lipschitzbedingung. Dann besitzt (AWP) eine eindeutige Lösung $y \in C^1([a, b] \to \mathbb{R}^d)$.

Beweis genauso wie oben mit $M := C([a, b] \to \mathbb{R}^d)$, $\|.\|$ wie oben.

2.24 Satz: Seien die Voraussetzungen von 2.21 oder 2.23 erfüllt und

$$\begin{aligned} y' = f(x, y) \quad &\wedge \quad y(x_0) = y_0 \quad \wedge \quad y \in C^1(I \to \mathbb{R}^d), \\ \tilde{y}\,' = f(x, \tilde{y}) \quad &\wedge \quad \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0 \quad \wedge \quad \tilde{y} \in C^1(\tilde{I} \to \mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

wobei $I, \tilde{I}$ die Existenzintervalle bezeichnen. Dann

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty \;\le\; \mathrm{e}^{L|x-x_0|}\|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty \quad \text{für } x \in I \cap \tilde{I}.$$

Insbesondere ist Stabilität für (AWP) gegeben.

Beweis: Sei $x \in I \cap \tilde{I}$ fest. O.B.d.A. sei $x > x_0$.
Zeige mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty \;\leq\; \frac{L^n}{n!}|x - x_0|^n \max_{x_0 \leq t \leq x} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty. \qquad (*)$$

Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\|y(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty &\overset{\text{(IG)}}{=} \Big\| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t - \tilde{y}_0 - \int_{x_0}^x f(t, \tilde{y}(t))\,\mathrm{d}t \Big\|_\infty \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + \Big\| \int_{x_0}^x \big(f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t)) \big)\,\mathrm{d}t \Big\|_\infty \\
&\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + \int_{x_0}^x \underbrace{\big\| f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t)) \big\|_\infty}_{\leq L\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\infty} \mathrm{d}t \\
&\leq \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + L \int_{x_0}^x \big(\max_{x_0 \leq s \leq x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\infty \big)\,\mathrm{d}t \\
&= \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + L(x - x_0) \max_{x_0 \leq s \leq x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung ist wahr.

Induktionsschritt von n auf $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\|y(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty &\overset{\text{wie oben}}{\leq} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + L \int_{x_0}^x \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_\infty \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Ind.vor}}{\leq} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + L \int_{x_0}^x \Big(\frac{L^n}{n!}|t - x_0|^n \max_{x_0 \leq s \leq x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\infty \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|t - x_0|)^k}{k!} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty \Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + L\Big(\frac{L^n}{n!} \max_{x_0 \leq s \leq x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\infty \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n + 1} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L^k |x - x_0|^{k+1}}{k!(k + 1)} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty \Big) \\
&= \frac{L^{n+1}}{(n + 1)!}|x - x_0|^{n+1} \max_{x_0 \leq s \leq x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\|_\infty \\
&\qquad + \underbrace{\|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L|t - x_0|)^{k+1}}{(k + 1)!} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty}_{= \sum_{k=0}^{n} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Induktionsbehauptung.

Induktionsschluss: Die Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n \to \infty$ folgt aus $(*)$:

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\|_\infty \;\leq\; 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty \;=\; \mathrm{e}^{L|x - x_0|} \|y_0 - \tilde{y}_0\|_\infty.$$

$\square$

2.25 Satz: Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : I \times D \to \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in I \times D$ gegeben.

1) Ist $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} \;=\; f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \;\wedge\; y'(x_0) = y_1 \;\wedge \ldots \wedge\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

dann ist

$$u \;=\; \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \;\in\; C^1(I \to \mathbb{R}^n) \qquad (**)$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$u' \;=\; \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n \end{pmatrix} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}}_{=:F(x,u)} \;\wedge\; u(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (***)$$

2) Ist $u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ Lösung von $(***)$ und $y(x) := u_1(x)$, so folgt $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$, und y ist Lösung von $(*)$.

Beweis: 1) $y \in C^n(I \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; u \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$

Außerdem:

$$\begin{array}{lcl} u_1 = y & \Rightarrow & u_1' = y' = u_2 \\ u_2 = y' & \Rightarrow & u_2' = y'' = u_3 \\ & \vdots & \\ u_{n-1} = y^{(n-2)} & \Rightarrow & u_{n-1}' = y^{(n-1)} = u_n \\ u_n = y^{(n-1)} & \Rightarrow & u_n' = y^{(n)} \overset{(*)}{=} f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{array}$$

$\Rightarrow$ u erfüllt die Dgl. in $(***)$.

Und $u_j(x_0) = y^{(j-1)}(x_0) = y_{j-1} \;\Rightarrow\;$ u erfüllt die Anfangsbedingung in $(***)$.

2) $u_j \in C^1(I \to \mathbb{R})$ für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & y = u_1 \in C^1(I \to \mathbb{R}) & \wedge \;\; y' = u_1' \overset{(***)}{=} u_2 \in C^1(I \to \mathbb{R}) \\ & y' = u_2 \in C^1(I \to \mathbb{R}) & \wedge \;\; y'' = u_2' \overset{(***)}{=} u_3 \in C^1(I \to \mathbb{R}) \\ & \vdots & \\ & y^{(n-1)} = u_n \in C^1(I \to \mathbb{R}) & \wedge \;\; y^{(n)} = u_n' \overset{(***)}{=} f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y \in C^n(I \to \mathbb{R}) \wedge y$ erfüllt die Dgl. in $(*)$.

Außerdem: $y^{(j)} = u_{j+1}$ für $j = 0, \ldots, n-1 \;\Rightarrow\; y^{(j)}(x_0) = u_{j+1}(x_0) = y_j$

$\Rightarrow$ y erfüllt die Anfangsbedingung in $(*)$.

$\square$

2.26 Bemerkungen: **1)** Man kann entsprechend auch jedes System

$$y^{(n)} = f(x,y) \text{ für } y : I \to \mathbb{R}^d$$

auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung zurückführen.

2) Jedes Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung kann auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung zurückgeführt werden, aber nicht umgekehrt.

2.27 Folgerung: Seien $n \in \mathbb{N}$, $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a, b > 0$,

$$Q := \left\{ (x,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le a \wedge \left\| \eta - \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \right\|_\infty \le b \right\},$$

$f \in C(Q \to \mathbb{R})$, und f genüge einer Lipschitzbedingung

$$\exists L > 0 \ \forall (x,\eta), (x,\tilde\eta) \in Q : \left| f(x,\eta) - f(x,\tilde\eta) \right| \le L \|\eta - \tilde\eta\|_\infty .$$

Ferner seien $K > 0$ und $\alpha > 0$ wie in 2.21 definiert. Dann besitzt das Anfangswertproblem $(*)$ eine eindeutige lokale Lösung $y \in C^n([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$.

Beweis: **1)** Existenz: Wende Picard-Lindelöf (2.21) an auf $(***)$ und beachte

$$\begin{aligned}
\left\| F(x,\eta) - F(x,\tilde\eta) \right\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \\ f(x, \eta_1, \dots, \eta_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde\eta_2 \\ \vdots \\ \tilde\eta_n \\ f(x, \tilde\eta_1, \dots, \tilde\eta_n) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \max \left\{ |\eta_2 - \tilde\eta_2|, \dots, |\eta_n - \tilde\eta_n|, |f(x,\eta) - f(x,\tilde\eta)| \right\} \\
&\le \max\{1, L\} \, \|u - \tilde\eta\|_\infty .
\end{aligned}$$

Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ $(***)$ besitzt eine Lösung $u \in C^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n)$
$\underset{2.)}{\overset{2.25}{\Rightarrow}}$ Für $y := u_1$ gilt $y \in C^n([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$ und y erfüllt $(*)$.

2) Eindeutigkeit: Seien $y, \tilde y \in C^n([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$ Lösungen von $(*)$.
Definiere $u, \tilde u$ durch $(**)$ $\underset{1.)}{\overset{2.25}{\Rightarrow}}$ $u, \tilde u$ erfüllen $(***)$
Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ $u = \tilde u$ $\Rightarrow$ $y = u_1 = \tilde u_1 = \tilde y$. $\square$

2.28 Satz *von Arzelà-Ascoli:* Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und (f_n) eine Folge in $C([a,b] \to \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:

(i) (f_n) ist punktweise beschränkt, d.h. $\forall x \in [a,b] : \big(f_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(ii) (f_n) ist gleichgradig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in [a,b] \ \ \forall n \in \mathbb{N} : \big(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon \big).$$

Dann besitzt (f_n) eine Teilfolge, die auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis: **1)** Wahl der Teilfolge: Sei (x_k) eine Abzählung von $\mathbb{Q}\cap[a,b]$.

$$\begin{array}{rcl}
\big(f_n(x_1)\big) \text{ beschränkt in } \mathbb{R} & \Rightarrow & \text{Teilfolge } \big(f_{n_k^{(1)}}(x_1)\big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\
\big(f_{n_k^{(1)}}(x_2)\big) \text{ beschränkt in } \mathbb{R} & \Rightarrow & \text{Teilfolge } \big(f_{n_k^{(2)}}(x_2)\big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\
\big(f_{n_k^{(2)}}(x_3)\big) \text{ beschränkt in } \mathbb{R} & \Rightarrow & \text{Teilfolge } \big(f_{n_k^{(3)}}(x_3)\big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\
\vdots & &
\end{array}$$

Definiere $g_l := f_{n_l^{(l)}}$ (Diagonalfolge)

$$\begin{array}{cccccc}
\underbrace{f_{n_1^{(1)}}}_{=:g_1}(x_1) & f_{n_2^{(1)}}(x_1) & f_{n_3^{(1)}}(x_1) & \dots & \to: & g(x_1) \\
f_{n_1^{(2)}}(x_2) & \underbrace{f_{n_2^{(2)}}}_{=:g_2}(x_2) & f_{n_3^{(2)}}(x_2) & \dots & \to: & g(x_2) \\
f_{n_1^{(3)}}(x_3) & f_{n_2^{(3)}}(x_3) & \underbrace{f_{n_3^{(3)}}}_{=:g_3}(x_3) & \dots & \to: & g(x_3)
\end{array}$$

$\Rightarrow$ (g_l) ist Teilfolge jeder der Folgen $(f_{n_k^{(j)}})_{k\in\mathbb{N}}$ für $j\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $(g_l(x_j))_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $j\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ (g_l) ist punktweise konvergent auf $\mathbb{Q}\cap[a,b]$.

2) Zeige: (g_l) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.
Es genügt zu zeigen: (g_l) ist gleichmäßige Cauchy-Folge auf $[a,b]$:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon>0\ \ \forall l,k>N_\varepsilon\ \ \forall x\in[a,b]: \big|g_l(x)-g_k(x)\big|<\varepsilon.$$

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist (g_l) dann auch gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$ (Analysis II).

Sei $\varepsilon>0$ beliebig, aber fest gewählt. Wähle $\delta>0$, so dass

$$\forall x_1,x_2\in[a,b]\ \ \forall n\in\mathbb{N}: \Big(|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow\big|f_n(x_1)-f_n(x_2)\big|<\frac{\varepsilon}{3}\Big).$$

(gleichgradige Stetigkeit)

$$\left.\begin{array}{l}
[a,b] \text{ ist kompakt} \\
\big\{]x_j-\delta,x_j+\delta[: j\in\mathbb{N}\big\} \text{ ist offene} \\
\text{Überdeckung von } [a,b]
\end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists J\in\mathbb{N}: [a,b]\subseteq\bigcup_{j=1}^{J}\,]x_j-\delta,x_j+\delta[$$

1) $\Rightarrow$ $\big(g_l(x_j)\big)_{l\in\mathbb{N}}$ ist konvergent für $j=1,\dots,J$
$\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall k,l>N_\varepsilon\ \ \forall j\in\{1,\dots,J\}: \big|g_l(x_j)-g_k(x_j)\big|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.
Sei $x\in[a,b]$ beliebig, aber fest. Wähle ein $j\in\{1,\dots,J\}$ mit $x\in\,]x_j-\delta,x_j+\delta[$.
Für $k,l>L$ folgt

$$\big|g_l(x)-g_k(x)\big| \ \le\ \underbrace{\big|g_l(x)-g_l(x_j)\big|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{\big|g_l(x_j)-g_k(x_j)\big|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{\big|g_k(x_j)-g_k(x)\big|}_{<\varepsilon/3}\ <\ \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ (g_l) ist Teilfolge von (f_n) und gleichmäßige Cauchy-Folge auf $[a,b]$. $\square$

2.29 Satz *(Peano):* Seien $x_0,y_0\in\mathbb{R}$, $a,b>0$, $Q:=[x_0,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$, $f\in C(Q\to\mathbb{R})$ und

$$K\ :=\ \max\{|f(x,y)|:(x,y)\in Q\}>0,\quad \alpha:=\max\{a,\frac{b}{K}\}.$$

Dann existiert mindestens eine Lösung $y\in C^1([x_0,x_0+\alpha]\to\mathbb{R})$ von

$$y'\ =\ f(x,y)\ \wedge\ y(x_0)=y_0. \tag{AWP}$$

Beweis: Für $\delta > 0$ definiere

$$y_\delta(x) \;:=\; \begin{cases} y_0 & \text{für } x \le x_0 \\ y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_\delta(t-\delta)\big)\,\mathrm{d}t & \text{für } x_0 < x \le x_0 + \alpha \end{cases}$$

1) Zeige: y_δ ist auf $]-\infty, x_0+\alpha]$ wohldefiniert:

Für $x_0 < x \le x_0 + \min\{\delta, \alpha\}$:

$$\begin{cases} y_\delta(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \\ \text{und } \big|y_\delta(x) - y_0\big| \le \Big|\displaystyle\int_{x_0}^{x} \big|f(t,y_0)\big|\,\mathrm{d}t \\ \qquad \le K \cdot |x - x_0| \le K \cdot \alpha \le b \end{cases}$$

$x_0 + \delta < x \le x_0 + \min\{2\delta, \alpha\}$:

$$\begin{cases} y_\delta(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_\delta\big|_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}(t-\delta)\big)\,\mathrm{d}t \\ \text{und } \big|y_\delta(x) - y_0\big| \le |x - x_0| \cdot K \le b \end{cases}$$

$\vdots$

Nach endlich vielen (k) Schritten: $x_0 + \min\{k\delta, \alpha\} = x_0 + \alpha$: Verfahren endet

2) Betrachte $\big(y_{1/n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[x_0 - 1, x_0 + \alpha]$:

$$\big|y_{1/n}(x) - y_{1/n}(\tilde{x})\big| \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x, \tilde{x} \le x_0 \\ \Big|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{1/n}(t-\delta)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le K \cdot |x - x_0| & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le K \cdot |x - \tilde{x}| & \text{für } \tilde{x} < x_0 < x \\ \Big|\displaystyle\int_{\tilde{x}}^{x} f\big(t, y_{1/n}(t-\delta)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le \underbrace{K \cdot |x - \tilde{x}|}_{\text{unabhängig von } n} & \text{für } x_0 \le x, \tilde{x} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\big(y_{1/n}\big)$ ist gleichgradig stetig auf $[x_0 - \delta, x_0 + \alpha]$
Außerdem:

$$\big|y_{1/n}(x)\big| \;=\; \Big|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{1/n}(t))\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; |y_0| + K|x - x_0|$$

$\Rightarrow$ $\big(y_{1/n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in [x_0 - 1, x_0 + \alpha]$ beschränkt.

$\overset{\text{A-A}}{\underset{2.28}{\Rightarrow}}$ Es gibt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(y_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ((δ_n) Teilfolge von $(\frac{1}{n})$):

$$y_{\delta_n} \;\to\; y \in C([x_0 - 1, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}) \text{ gleichmäßig auf } [x_0 - 1, x_0 + \alpha]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; \big|y_{\delta_n}(t - \delta_n) - y(t)\big| \;&\le\; \big|y_{\delta_n}(t-\delta_n) - y_{\delta_n}(t)\big| + \big|y_{\delta_n}(t) - y(t)\big| \\ &\to\; 0 \text{ für } n \to \infty \text{ gleichmäßig auf } [x_0, x_0 + \alpha] \end{aligned}$$

Q ist kompakt $\;\Rightarrow\;$ f ist gleichmäßig stetig auf Q

$\qquad\qquad\Rightarrow\;$ $f\big(t, y_{\delta_n}(t - \delta_n)\big) \;\to\; f\big(t, y(t)\big)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [x_0, x_0 + \alpha]$

3) Für $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ folgt

$$\begin{aligned} y(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} y_{\delta_n}(x) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{\delta_n}(t - \delta_n)\big)\,\mathrm{d}t\Big) \\ &=\; y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f\big(t, y_{\delta_n}(t-\delta_n)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

$\overset{\text{wie Beweis}}{\underset{\text{Picard-Lindelöf}}{\Rightarrow}}$ $\quad y' = f(x, y) \;\wedge\; y(x_0) = y_0$ und $y \in C^1([x_0, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$.

$\square$

2.30 Bemerkung: Peano liefert Existenz, aber keine Eindeutigkeit.

2.31 Folgerung: Sind die Voraussetzungen von 2.29 mit $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ erfüllt, so besitzt (AWP) mindestens eine Lösung $y \in C^1([x_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$.

Beweis: 2.29 $\Rightarrow$ Lösung $y_+ \in C^1([x_0, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$ von (AWP) existiert
Beweis von 2.29 $\Rightarrow$ Lösung $y_- \in C^1([x_0 - \alpha, x_0] \to \mathbb{R})$ von (AWP) existiert

Setze $y(x) := \begin{cases} y_+(x) & \text{für } x \in [x_0, x_0 + \alpha] \\ y_-(x) & \text{für } x \in [x_0 - \alpha, x_0] \end{cases}$

Zeige: $y \in C^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$:

1) $\lim\limits_{x \uparrow x_0} y(x) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} y_-(x) \overset{\text{(AWP)}}{=} y(x_0) \overset{\text{(AWP)}}{=} y_+(x_0) \;\Rightarrow\; y$ ist stetig in x_0
$\Rightarrow\; y \in C([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$.

2)
$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow x_0} y'(x) &= \lim_{x \uparrow x_0} y'_-(x) \overset{\text{(AWP)}}{=} \lim_{x \uparrow x_0} f(x, y_-(x)) = f(x_0, y_0) \\ \lim_{x \downarrow x_0} y'(x) &= \lim_{x \downarrow x_0} y'_+(x) \overset{\text{(AWP)}}{=} \lim_{x \downarrow x_0} f(x, y_+(x)) = f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$\overset{y \text{ stetig}}{\Rightarrow}$ y differenzierbar in x_0 und y' stetig in x_0

$\Rightarrow$ $y \in C^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R})$

$\square$

2.32 Beispiele: **1)** $y' = -x \cdot y^2 =: f(x, y)$: Betrachte $Q := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.
Es gilt $f \in C(Q \to \mathbb{R})$ und

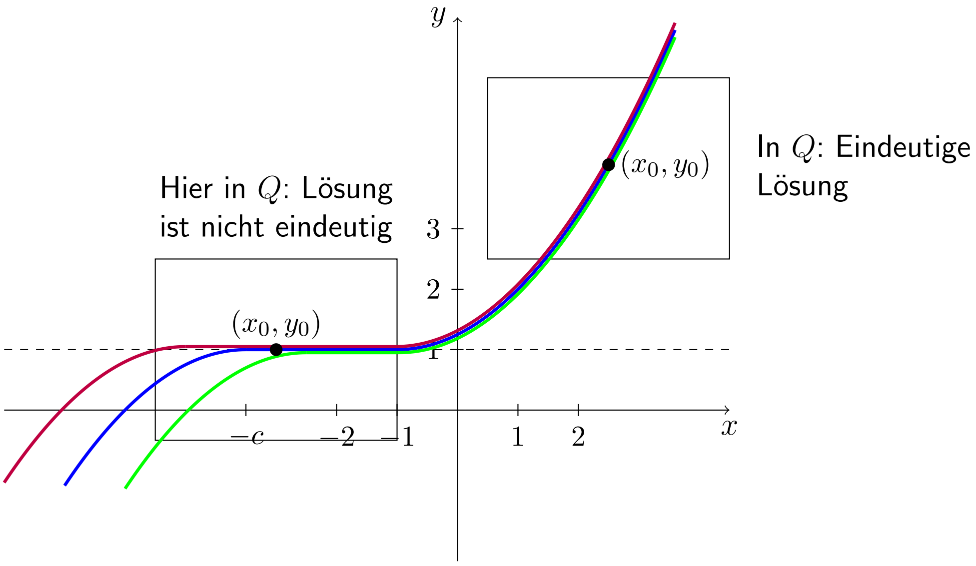
$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| &= \left|x \cdot (y^2 - \tilde{y}^2)\right| = |x \cdot (y + \tilde{y}) \cdot (y - \tilde{y})| \\ &\leq \underbrace{\max_{(x,y) \in Q} \left|x \cdot (y + \tilde{y})\right|}_{=:L} \cdot |y - \tilde{y}|. \end{aligned}$$

Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ Das Anfangswertproblem

$$y' = -x \cdot y^2 \;\wedge\; y(x_0) = y_0$$

besitzt für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine lokale Lösung.

2) $y' = |y - 1|^{1/2} =: f(x, y)$ (vgl. 2.9)



Es gilt $f \in C(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) \overset{\text{Peano}}{\Rightarrow}$ Das Anfangswertproblem

$$y' = |y-1|^{1/2} \ \wedge \ y(x_0) = y_0$$

besitzt für jede Wahl von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine lokale Lösung.

Falls $y_0 \neq 1$, $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ und $1 \notin [y_0 - b, y_0 + b]$, gilt $f \in C^1(Q \to \mathbb{R})$.

$\overset{2.22}{\Rightarrow}$ f erfüllt in Q eine Lipschitz-Bedingung

$\overset{\text{Picard}}{\underset{\text{Lindelöf}}{\Rightarrow}}$ Das AWP besitzt eine eindeutige lokale Lösung

Aber falls $1 \in [y_0 - b, y_0 + b]$, dann erfüllt f keine Lipschitz-Bedingung in Q: Mit $\tilde{y} = 1$:

$$\frac{|f(x,y) - f(x,1)|}{|y-1|} = \frac{|y-1|^{1/2}}{|y-1|} = \frac{1}{|y-1|^{1/2}} \to \infty \qquad \text{für } y \to 1.$$

$\Rightarrow$ Voraussetzungen für Picard-Lindelöf nicht erfüllt.

Dies erklärt, warum das Anfangswertproblem in Beispiel 2.9, Teil 2), unendlich viele Lösungen besitzt, die sich in Punkten $(x, 1)$ verzweigen.

2.4 Lineare Systeme 1. Ordnung

2.33 Definition: Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $d \in \mathbb{N}$, $A : I \to \mathbb{R}^{(d^2)}$ (im Fall $d \geq 2$ eine Matrix-wertige Abbildung) und $g : I \to \mathbb{R}^d$. Dann heißt die explizite Differentialgleichung

$$y' = A(x) \cdot y + g(x)$$

für $y : I \to \mathbb{R}^d$ **lineare Differentialgleichung** (oder lineares System) 1. Ordnung.
Ist $g = 0$, so heißt das System **homogen**, sonst **inhomogen**. Im letzteren Fall heißt die Differentialgleichung

$$y' = A(x) \cdot y$$

zugehörige homogene Differentialgleichung.

2.34 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 3x \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1' &= \frac{1}{x} y_1 + y_2 + 2x^2 \\ y_2' &= \frac{1}{x} y_2 + 3x \end{cases}$

Zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot y$$

2.35 Bemerkung: Bei linearen Differentialgleichungen gibt es keine Einschränkung für die Werte von $y(x)$. Die einzige Beschränkung liegt im Laufbereich I für die Definiertheit von $A(x)$ und $g(x)$.

2.36 Satz: seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $d \in \mathbb{N}$, $A \in C(]a,b[\to \mathbb{R}^{d^2})$, $g \in C(]a,b[\to \mathbb{R}^d)$, $(x_0, y_0) \in\,]a,b[\, \times \mathbb{R}^d$. Dann besitzt

$$y' = A(x) \cdot y + g(x) \ \wedge \ y(x_0) = y_0 \qquad \text{(AWP)}$$

genau eine Lösung $y \in C^1(]a,b[\to \mathbb{R}^d)$. Insbesondere: Im Fall $a = -\infty,\ b = \infty$ ist die Lösung global.

Beweis: Wähle (a_n) monoton fallend, (b_n) monoton wachsend mit $a < a_n < x_0 < b_n < b$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$, $b_n \to b$. Setze $f(x,y) := A(x) \cdot y + g(x)$. Dann ist $f \in C([a_n, b_n] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d)$ und für $(x,y), (x,\tilde{y}) \in [a_n, b_n] \times \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\|_\infty &= \| \underbrace{A(x) \cdot (y - \tilde{y})}_{= \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(x)(y_j - \tilde{y}_j) \right)_{i=1,\dots,d}} \|_\infty \\ &\leq \Big(\max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}(x)| \Big) \|y - \tilde{y}\|_\infty \\ &\leq \underbrace{\Big(\max_{a_n \leq x \leq b_n} \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}(x)| \Big)}_{=:L} \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{aligned}$$

Folgerung 2.23 $\Rightarrow$ (AWP) besitzt genau eine Lösung $y = y_n \in C^1([a_n, b_n] \to \mathbb{R}^d)$.
Eindeutigkeit der Lösung in $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ $\Rightarrow$ $y_n\big|_{[a_{n-1}, b_{n-1}]} = y_{n-1}$, d.h. y_n ist Fortsetzung von y_{n-1}
Setze

$$y(x) := y_n(x) \text{ für } x \in [a_n, b_n].$$

Dann:

- y ist definiert auf $]a,b[$
- $y \in C^1(]a,b[\to \mathbb{R}^d)$: Für $x \in\,]a,b[$ wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in\,]a_n, b_n[$
  $\underset{\text{in } [a_n,b_n]}{\overset{y=y_n}{\Rightarrow}}$ y ist differenzierbar in Umgebung $[a_n, b_n]$ von x mit stetiger Ableitung.

- y löst (AWP)
- y ist die einzige Lösung: Ist $\tilde{y}$ eine weitere Lösung, so folgt aus der Eindeutigkeit in $[a_n, b_n]$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \tilde{y}\big|_{[a_n,b_n]} = y_n = y\big|_{[a_n,b_n]}.$$

$\Rightarrow\ \tilde{y} = y$

□

2.4.1 Homogene Differentialgleichungssysteme

Für $A : I \to \mathbb{R}^{(d^2)}$ betrachte das homogene System

$$y' \ = \ A(x) \cdot y. \tag{$*$}$$

2.37 Satz: **1)** Sind $y_{[1]}, y_{[2]}$ Lösungen von $(*)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $y := \alpha y_{[1]} + \beta y_{[2]}$ eine Lösung von $(*)$.

2) Ist $A \in C(I \to \mathbb{R}^{d^2})$, so bildet die Menge aller Lösungen

$$V \ := \ \big\{ y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n) : y' = A(x) \cdot y \big\}$$

einen Vektorraum der Dimension d. Eine Basis $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}\}$ von V heißt **Fundamentalsystem** zum Differentialgleichungssystem $(*)$.

Beweis: **1)** $y' = \alpha y'_{[1]} + \beta y'_{[2]} = \alpha A(x) \cdot y_{[1]} + \beta A(x) \cdot y_{[2]} = A(x) \cdot \big(\alpha y_{[1]} + \beta y_{[2]}\big) = A(x) \cdot y$
$\Rightarrow\ y' = A(x) \cdot y$.

2) $y = 0 \ \Rightarrow\ y \in V$, insbesondere $V \neq \emptyset$
$y \in V \ \Rightarrow\ -y \in V$
V bildet nun mit der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren einen Vektorraum.

Sei $x_0 \in I$ fest und

$$T_{x_0} : \mathbb{R}^d \to V : y_0 \mapsto y := \text{ Lösung von } y' = A(x) \cdot y \ \wedge \ y(x_0) = y_0.$$

Dann ist T_{x_0} wohldefiniert, da die Lösung y existiert und eindeutig ist (Satz 2.36).

T_{x_0} ist linear: $T_{x_0}(\alpha y_0 + \beta \tilde{y}_0) = \alpha T_{x_0}(y_0) + \beta T_{x_0}(\tilde{y}_0)$
injektiv: $T_{x_0}(y_0) = T_{x_0}(\tilde{y}_0) \ \Rightarrow y_0 = T_{x_0}(y_0) = T_{x_0}(\tilde{y}_0)(x_0) = \tilde{y}_0$
surjektiv: Ist $y \in V$ gegeben, so setze $y_0 = y(x_0) \Rightarrow y = T_{x_0} y_0$, denn
y ist eine Funktion, für die $y' = A(x) \cdot y \wedge y(x_0) = y_0$ gilt und
$T_{x_0}(y_0)$ ist eine Funktion, für die $T_{x_0}(y_0)' = A(x) \cdot T_{x_0}(y_0) \wedge T_{x_0}(y_0)(x_0) = y_0$ gilt

$\Rightarrow\ T_{x_0}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus
$\Rightarrow\ \dim(V) = \dim(\mathbb{R}^d) = d$.

□

2.38 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y \;\Rightarrow$ Der Lösungsraum hat die Dimension $\dim(V) = 3$
Fundamentalsystem $\{y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]}\}$ mit

$$y_{[1]}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x},\; y_{[2]}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x},\; y_{[3]}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x},$$

$$\Rightarrow \text{ Lösungsraum } V = \Big\{ y = c_1\, y_{[1]} + c_2\, y_{[2]} + c_3\, y_{[3]} : c_j \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Sei $x_0 = 0$. Die Abbildung T_0 ist gegeben durch

$$T_0 : \mathbb{R}^n \to V : \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{=y_0} \mapsto \Big(\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} + \frac{y_1 - y_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + \frac{y_1 + y_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \Big)$$

denn:

- $T_0(y_0)$ löst die Differentialgleichung, da $T_0(y_0) \in V$, und
- $T_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} (0) \;=\; y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y_1 - y_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{y_1 + y_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\;$ $T_0(y_0)$ ist Lösung des AWP

$$y' \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y \;\wedge\; y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

2.39 Folgerung: Seien $A \in C(I \to \mathbb{R}^{d^2})$ und $y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}$ Lösungen von $(*)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big\{y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}\big\}$ linear unabhängig in V,
d.h. $\big(c_1 \cdot y_{[1]} + \ldots + c_n \cdot y_{[d]} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0\big)$,

(ii) $\big\{y_{[1]}(x_0), \ldots, y_{[d]}(x_0)\big\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$ für ein $x_0 \in I$,

(iii) $\big\{y_{[1]}(x), \ldots, y_{[d]}(x)\big\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$ für jedes $x \in I$.

Beweis: Für jedes $x \in I$ ist $T_x : \mathbb{R}^n \to V$ ein Vektorraum-Isomorphismus, bildet also linear unabhängige Mengen auf linear unabhängige Mengen ab. $\square$

2.40 Folgerung: Seien $A \in C(I \to \mathbb{R}^{d^2})$ und $y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}$ Lösungen von $(*)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big\{y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}\big\}$ ist ein Fundamentalsystem.

(ii) $W(x_0) := \det\big(y_{[1]}(x_0) \;\ldots\; y_{[d]}(x_0)\big) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$.

(iii) $W(x) := \det\big(y_{[1]}(x) \;\ldots\; y_{[d]}(x)\big) \neq 0$ für alle $x \in I$.

$W(x)$ heißt **Wronskideterminante**.

Beweis: 2.39 und Lineare Algebra: Für $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\{v_1, \ldots, v_d\} \text{ linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \det(v_1 \ldots v_d) \neq 0. \qquad \square$$

2.41 Beispiele: **1)** Auf $I :=]0, \infty[$ besitzt

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot y$$

das Fundamentalsystem $\{y_{[1]}, y_{[2]}\} := \left\{x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, denn beide Funktionen sind Lösungen und

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = -x^2 \neq 0 \text{ auf } I$$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen: $y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Für Beispiel 2.38:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{3x} \\ 0 & -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x} - (-\mathrm{e}^{2x})) = 2\mathrm{e}^{3x} \neq 0.$$

2.42 Reduktion von D'Alembert: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I \to \mathbb{R}^{d^2})$ und $y \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$ eine Lösung von

$$y' = A(x) \cdot y \tag{$*$}$$

mit $y_1(x) \neq 0$ auf I. Der Ansatz

$$\tilde{y}(x) = c(x)\, y(x) + z(x) \quad \text{mit } z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ z_d(x) \end{pmatrix}$$

eingesetzt in $(*)$:

$$\begin{aligned}
& c'y + cy' + z' = \tilde{y}' \overset{!}{=} A(x) \cdot \tilde{y} = c(x)\, A(x) \cdot y + A(x) \cdot z(x) \\
\overset{y \text{ löst } (*)}{\Leftrightarrow} \quad & c'\, y + z' = A(x) \cdot z \\
\Leftrightarrow \quad & z' = A(x) \cdot z - c'\, y \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 0 = \displaystyle\sum_{k=2}^{d} a_{1k}(x)\, z_k - c'\, y_1 \\ z_j' = \displaystyle\sum_{k=2}^{d} a_{jk}(x)\, z_k - c'\, y_j \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} c' = \dfrac{1}{y_1} \displaystyle\sum_{k=2}^{d} a_{1k}(x)\, z_k & (1) \\ z_j' = \displaystyle\sum_{k=2}^{d} \Big(a_{jk}(x) - \frac{y_j}{y_1} a_{1k}(x)\Big) z_k \quad (j = 2, \ldots, d) & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Löse (2): $d-1$ Differentialgleichungen
Mit Lösung von (2): Bestimme c aus (1) durch Integrieren

2.43 Satz: Seien die Voraussetzungen von 2.42 erfüllt. Ist $\{z_{[1]}, \dots, z_{[d-1]}\}$ ein Fundamentalsystem zu (2) und

$$c_j'(x) \;=\; \frac{1}{y_1(x)} \sum_{k=2}^{d} a_{1k}(x) \left(z_{[j]}(x)\right)_k \quad (j = 1, \dots, d-1),$$

dann ist

$$\left\{ c_1 y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[1]} \end{pmatrix}, c_2 y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[2]} \end{pmatrix}, \dots, c_{d-1} y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[d-1]} \end{pmatrix}, y \right\}$$

ein Fundamentalsystem zu $(*)$.

Beweis: 1) Alle Funktionen $c_j y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[j]} \end{pmatrix}$ und y lösen $(*)$ nach 2.42

2) Zeige: Für die Wronski-Determinante gilt $W(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} W(x) \quad &= \quad \det\left(c_1 y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[1]} \end{pmatrix}, \dots, c_{d-1} y + \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[d-1]} \end{pmatrix}, y \right) \\ &= \quad \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ z_{[1]} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ z_{[d-1]} \end{pmatrix}, y \right) \\ &\underset{\text{nach 1. Zeile}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} \quad (-1)^d y_1 \det\left(z_{[1]} \;\; \dots \;\; z_{[d-1]} \right) \\ &\neq \quad 0 \end{aligned}$$

$\overset{2.40}{\Rightarrow}$ Behauptung. $\square$

2.4.2 Inhomogene Systeme 1. Ordnung

Für $A : I \to \mathbb{R}^{(d^2)}$, $g : I \to \mathbb{R}^d$ betrachte das inhomogene System

$$y' \;=\; A(x) \cdot y + g(x). \tag{$**$}$$

2.44 Satz: **1)** Sei $y_{[1]}$ eine Lösung von $(**)$. Für $y_{[2]} \in C^1(I \to \mathbb{R}^d)$ sind äquivalent:

(i) $y_{[2]}$ ist Lösung von $(**)$.

(ii) $y := y_{[1]} - y_{[2]}$ ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems $y' = A(x) \cdot y$.

2) Ist y_{part} eine Lösung von $(**)$ (eine **partikuläre Lösung**), so ist der affine Raum $\tilde{V}$ aller Lösungen von $(**)$ gegeben durch

$$\tilde{V} \;=\; \left\{ y_{\text{part}} + y : y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n) \;\wedge\; y' = A(x) \cdot y \right\} \;=\; y_{\text{part}} + \underbrace{V}_{\text{Lösungsraum der zugehörigen homogenen Dgl}}$$

Beweis: 1) (i) $\Rightarrow$ $y' = y_{[1]}' - y_{[2]}' = A(x) \cdot y_{[1]} + g(x) - (A(x) \cdot y_{[2]} + g(x)) = A(x) \cdot \left(y_{[1]} - y_{[2]}\right) = A(x) \cdot y \;\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ $y_{[2]}' = (y_{[1]} - y)' = A(x) \cdot y_{[1]} + g(x) - A(x) \cdot y = A(x) \cdot \left(y_{[1]} - y\right) + g(x) = A(x) \cdot y_{[2]} + g(x) \;\Rightarrow$ (ii).

2) **a)** $\tilde{y} \in \tilde{V} \;\Leftrightarrow\; \tilde{y}$ löst $(**)$

$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}\; y := \tilde{y} - y_{\text{part}}$ löst $(*)$

$\Rightarrow\; \tilde{y} = y_{\text{part}} + y \in y_{\text{part}} + V$

b) $\tilde{y} \in y_{\text{part}} + V$, d.h. $\tilde{y} = y_{\text{part}} + y$ und y löst $(*)$

$\Leftrightarrow\; y_{\text{part}} - \tilde{y} = -y$ löst $(*)$

$\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow}\; \tilde{y}$ ist Lösung von $(**)$, also $\tilde{y} \in \tilde{V}$ $\square$

2.45 Wie man eine partkuläre Lösung findet *(Variation der Konstanten):* Sei $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[d]}\}$ ein Fundamentalsystem des zu $(**)$ gehörenden homogenen Systems und

$$y := c_1(x)y_{[1]} + \ldots + c_d(x)y_{[d]}.$$

Dann sind äquivalent:

(i) y ist Lösung des inhomogenen Systems $(**)$.

(ii) $c' = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_d' \end{pmatrix}$ ist eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\Big(y_{[1]}(x) \;\ldots\; y_{[d]}(x)\Big)}_{\substack{d\times d\text{-Matrix mit Höchstrang}\\ \text{da } W(x)\neq 0}} \cdot c'(x) \;=\; g(x).$$

Beweis: (i) $\Leftrightarrow\; g(x) = y' - A(x)\cdot y$

$$\Leftrightarrow\; g(x) = c_1'y_{[1]} + \ldots + c_d'y_{[d]} + \underbrace{c_1y_{[1]}' + \ldots + c_dy_{[d]}' - A(x)\cdot y}_{=c_1(y_{[1]}'-A(x)\cdot y_{[1]})+\ldots=0}$$

$$\Leftrightarrow\; g(x) = c_1'y_{[1]} + \ldots + c_d'y_{[d]} = \Big(y_{[1]} \;\ldots\; y_{[d]}\Big)\cdot\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_d' \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ (ii) $\square$

2.46 Bemerkung: Variation der Konstanten funktioniert auch im Fall $d = 1$ (kein System, eine lineare Differentialgleichung).

2.47 Beispiele: **1)** Auf $I =]0,\infty[$: $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 3x \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung (vgl. 2.41):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ansatz: $y(x) = c_1(x) \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + c_2(x) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist partikuläre Lösung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 3x \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 3x \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & c_2' = -x \ \wedge\ c_1' = 3 \end{aligned}$$

Wähle $c_1 = -\dfrac{x^2}{2} \ \wedge \ c_1(x) = 3x$ (nicht eindeutig!)

$\Rightarrow$ partikuläre Lösung $y_{\mathsf{part}}(x) \ = \ 3x \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} - \frac{x^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix}$

Alle Lösungen: $y(x) \ = \ \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y' = (\sin x)y + x\mathrm{e}^{-\cos x}$.

a) Zugehörige homogene Gleichung: $y' = (\sin x)y$ ist separierbar
Konstante Lösung: $y(x) = 0$
Für $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \sin x \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ \ln|y| &= -\cos x + c \\ \Leftrightarrow\ |y| &= \mathrm{e}^{-\cos x} \cdot \mathrm{e}^c \\ \Leftrightarrow\ y(x) &= \underbrace{\pm\mathrm{e}^c}_{=:d} \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} \end{aligned}$$

Mit konstanter Lösung: $y(x) = d\mathrm{e}^{-\cos x}$, $d \in \mathbb{R}$ sind alle Lösungen der homogenen Dgl, Fundamentalsystem: $\{\mathrm{e}^{-\cos x}\}$ (da $d = 1$).

b) Partikuläre Lösung: Ansatz $y_{\mathsf{part}} = c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}$ ist genau dann Lösung der inhomogenen Dgl, wenn

$$\mathrm{e}^{-\cos x} c' = x\mathrm{e}^{-\cos x} \ \Leftrightarrow \ c' = x$$

Wähle $c(x) = \frac{x^2}{2} \ \Rightarrow \ y_{\mathsf{part}} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\cos x}$

Alle Lösungen: $y = \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-\cos x} + c\,\mathrm{e}^{-\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.

2.4.3 Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.48 Satz: Der Raum $\mathbb{R}^{d^2}$ versehen mit der Norm

$$\|A\| \ := \ \sum_{k,j=1}^{d} |a_{jk}|$$

ist ein Banachraum, und es gilt $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für $A, B \in \mathbb{R}^{d^2}$.

Beweis der Normungleichung durch Nachrechnen. $\mathbb{R}^{d^2}$ ist mit jeder Norm vollständig. Konvergenz bedeutet koordinatenweise Konvergenz in $\mathbb{R}$.

2.49 Definition: Für $A \in \mathbb{R}^{d^2}$ sei

$$\mathrm{e}^A \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k \quad \text{mit } A^0 := E_{d\times d}.$$

Die Reihe konvergiert wegen

$$\Big\| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} A^k \Big\| \;\le\; \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \|A^k\| \;\le\; \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|^k \;<\; \varepsilon \quad \text{für } m \ge n > N_\varepsilon.$$

2.50 Folgerung: **1)** e^A ist eine $d \times d$-Matrix.

2) $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B$ falls A, B kommutieren (Beweis mit Cauchy-Produkt für Reihen).

3) Die Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^{x\cdot A}$ ist beliebig oft differenzierbar (d.h. jede Koordinate ist differenzierbar), und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{x\cdot A} \;=\; A \cdot \mathrm{e}^{x\cdot A}.$$

Beweis wie bei Ableitung von Potenzreihen.

4) Für $v \in \mathbb{R}^d$ und $y(x) := \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v$ gilt $y \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d)$ und

$$y'(x) = A \cdot \mathrm{e}^{x\cdot A} = A \cdot y(x) \;\wedge\; y(0) = E_{d\times d} \cdot v = v.$$

2.51 Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{d^2}$ eine konstante Matrix. Für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ besitzt das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; A \cdot y, \qquad y(x_0) = y_0$$

die eindeutige globale Lösung

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{(x-x_0)A} \cdot y_0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: 2.50 und 2.36.

2.52 Fundamentalsystem: Sei $A \in \mathbb{R}^{d^2}$. Ist $\{v_1, \ldots, v_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ linear unabhängig und $y_{[j]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v_j$, so bildet $\{y_{[1]}, \ldots, v_{[d]}\}$ ein Fundamentalsystem für $y' = A \cdot y$.

Beweis: **1)** $y = \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v_j \;\Rightarrow\; y' = A \cdot y$ siehe letzte Folgerung.

2) Wronski-Determinante und Satz 2.40

$$W(0) \;=\; \det\left(\mathrm{e}^{0A} \cdot v_1 \;\ldots\; \mathrm{e}^{0A} \cdot v_n\right) \;=\; \det(v_1 \;\ldots\; v_d) \;\neq 0.$$

da $\{v_1, \ldots, v_d\}$ Basis des $\mathbb{R}^d$.

□

2.53 Bemerkung:: Jetzt geht es nur noch darum, die Basis $\{v_1, \ldots, v_d\}$ geschickt zu wählen. Dazu wird Lineare Algebra benötigt: Sei $A \in \mathbb{R}^{d^2}$ und $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d : v \mapsto A \cdot v$ die zugehörige lineare Abbildung.

1) Gibt es eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_d\} \subseteq \mathbb{C}^d$ aus Eigenvektoren von T zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, so besitzt T bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\big(T(v)\big)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix} \cdot (v)_B \quad ((v)_B := \text{ Koordinaten bezüglich } B)$$

Für $v_j \in B$ gilt $A^k \cdot v_j = \lambda_j^k \cdot v_j$.

2) Im allgemeinen Fall existiert eine Basis $B \subseteq \mathbb{C}^d$, so dass

$$\big(T(v)\big)_B = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_l(\lambda_l) \end{pmatrix} \cdot (v)_B,$$

wobei

$$J_m(\lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_m & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Jordan-Blöcke bezeichnen (Jordansche Normalform). Die Basis B besteht aus Hauptvektorketten: Ist z.B. $J_1(\lambda_1)$ eine $n \times n$-Matrix, so haben die Basisvektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die Eigenschaft

$$\begin{aligned} A \cdot v_1 &= \lambda_1 \cdot v_1 \\ A \cdot v_j &= \lambda_1 \cdot v_j + v_{j-1} \quad \text{für } j = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

($v_j =$ Hauptvektor der Stufe $j-1$). Es gelten

$$\begin{aligned} A^k \cdot v_1 &= \lambda_1^k \cdot v_1 \\ A^k \cdot v_2 &= A^{k-1} \cdot A \cdot v_1 = A^{k-1} \cdot (\lambda_1 \cdot v_2 + v_1) \\ &= \lambda_1 \cdot A^{k-1} \cdot v_2 + \lambda^{k-1} \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot A^{k-2} \cdot (\lambda_1 \cdot v_2 + v_1) + \lambda^{k-1} \cdot v_1 \\ &= \lambda_1^2 \cdot A^{k-2} \cdot v_2 + 2\lambda^{k-1} \cdot v_1 \\ &\vdots \\ &= \lambda_1^k \cdot v_2 + k\lambda_1^{k-1} \cdot v_1 \\ A^k \cdot v_3 &\overset{\text{selber}}{=} \lambda_1^k \cdot v_3 + \underbrace{k}_{=\binom{k}{1}} \lambda_1^{k-1} \cdot v_2 + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} \cdot v_1 \quad \text{für } k \geq 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

3) Da A reell ist, kann in jedem Fall B so gewählt werden, dass die Basisvektoren reell sind oder dass

$$v \in B \;\Leftrightarrow\; \overline{v} \in B$$

gilt (z.B. $A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot \overline{v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}$).

2.54 Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{d^2}$ und B eine Basis wie oben angegeben.

1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A. Dann kann das zugehörige Basiselement v reell gewählt werden, und es gilt

$$\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v \;=\; \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v.$$

2) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Eigenwert von A. Ist $v \in B$ zugehöriger Eigenvektor, so ist v nicht reell, und es gilt $\overline{v} \in B$ und

$$\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot (\underbrace{v+\overline{v}}_{\text{reell}}) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)x}\Big(\cos\big(\mathrm{Im}(\lambda)x\big)(\underbrace{v+\overline{v}}_{\text{reell}}) - \sin\big(\mathrm{Im}(\lambda)x\big)\underbrace{\frac{1}{\mathrm{i}}(v-\overline{v})}_{\text{reell}}\Big),$$

$$\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot \tfrac{1}{\mathrm{i}}(v-\overline{v}) = 2\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)x}\Big(\cos\big(\mathrm{Im}(\lambda)x\big)\tfrac{1}{\mathrm{i}}(v-\overline{v}) + \sin\big(\mathrm{Im}(\lambda)x\big)(v+\overline{v})\Big).$$

3) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A mit zugehöriger (reller) Hauptvektorkette $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so gilt

$$\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v_j \;=\; \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \sum_{l=0}^{j-1} \frac{x^l}{l!} \cdot v_{j-l} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

4) Ist $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Eigenwert von A mit zugehöriger Hauptvektorkette $\{v_1, \ldots, v_n\}$, so ist $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ Hauptvektorkette zum Eigenwert $\overline{\lambda}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot (v_j + \overline{v}_j) &= \sum_{l=0}^{j-1} \frac{x^l}{l!} \cdot 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v_{j-l}\right) \\ \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}}(v_j - \overline{v}_j) &= \sum_{l=0}^{j-1} \frac{x^l}{l!} \cdot 2\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v_{j-l}\right) \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n$.

Beweis: 1) $\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x\cdot A)^k \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\lambda^k}{k!} \cdot v = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v$

2) $$\left.\begin{aligned} &\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v \overset{1)}{=} \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v \\ &\mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot \overline{v} = \mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} \cdot \overline{v} = \overline{\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot (v+\overline{v}) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} \cdot v\right).$$

3) Für v_3: Wir wissen:

$$\begin{aligned} A \cdot v_3 &= \lambda \cdot v_3 + v_2 \\ A^k \cdot v_3 &= \lambda^k \cdot v_3 + k\lambda^{k-1} \cdot v_2 + \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \cdot v_1 \text{ für } k \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; \mathrm{e}^{x\cdot A} \cdot v_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k \cdot v_3 \\ &= v_3 + \frac{x}{1!} \cdot A \cdot v_3 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k \cdot v_3 \\ &= v_3 + x \cdot (\lambda \cdot v_3 + v_2) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \left(\lambda^k v_3 + k\lambda^{k-1} \cdot v_2 + \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \cdot v_1\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \lambda^k \cdot v_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot k\lambda^{k-1} \cdot v_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \cdot v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda x} \cdot v_3 + x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^{k-1} \cdot v_2 + x^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2} \lambda^{k-2} \cdot v_1 \\ &= e^{\lambda x} \cdot v_3 + x e^{\lambda x} \cdot v_2 + \frac{x^2}{2} \cdot e^{\lambda x} \cdot v_1. \end{aligned}$$

4) Wie 2). □

2.55 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} y$

Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -2$

Eigenraum: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ der Eigenraum ist 1-dimensional, Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Hauptvektor: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$

Hauptvektor z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem: $\left\{ x \mapsto e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x \mapsto e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

2.5 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Im gesamten Kapitel seien $-\infty \le a < b \le \infty$ und $I =]a, b[$.

2.56 Definition: Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}, g \in C(I \to \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y \;=\; g(x) \qquad (*)$$

für $y : I \to \mathbb{R}$ heißt **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Ist $g = 0$, so heißt sie **homogen**, sonst **inhomogen**.

$$V_g \;:=\; \left\{ y \in C^n(I \to \mathbb{R}) : y \text{ erfüllt } (*) \right\}$$

bezeichnet den Lösungsraum, V_0 bezeichnet demnach den Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

2.57 Bemerkung: Definiert man wie früher $u := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, so gilt

$$u' \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \ldots & & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(vgl. 2.25). Beachte: Ist $u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ Lösung von $(**)$, so ist $y := u_1$ Lösung von $(*)$. Sei

$$\tilde{V_g} \;:=\; \left\{ u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n) : u \text{ erfüllt } (**) \right\}$$

der Lösungsraum von $(**)$.

2.25 $\Rightarrow$ die Abbildung

$$T : V_g \to \tilde{V}_g : y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ist bijektiv, und es gilt $T^{-1}(u) = u_1$.

2.58 Satz*:* Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}, g \in C(I \to \mathbb{R})$ und $x_0 \in I$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann besitzt $(*)$ genau eine Lösung $u \in C^n(I \to \mathbb{R})$, die die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \ \wedge \ y'(x_0) = y_1 \ \ldots \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{AB}$$

erfüllt.

Beweis: 2.36 $\Rightarrow$ $(**)$ besitzt genau eine Lösung $u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$, die die Anfangsbedingung

$$u(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

erfüllt. Definiere $y := T^{-1}u \ \Rightarrow \ y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ und y erfüllt $(*)$ und (AB).
Da T bijektiv ist, folgt die Eindeutigkeit.

□

2.59 Homogene Differentialgleichung*:* **1)** Die Menge aller Lösungen

$$V_0 \ := \ \left\{ y \in C^n(I \to \mathbb{R}) : y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = 0 \right\}$$

bildet einen Vektorraum der Dimension n. Jede Basis von V heißt **Fundamentalsystem**.

2) n Lösungen $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\}$ der homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn

$$\exists x \in I : W(x) \ := \ \det \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} y_{[1]}(x) \\ y'_{[1]}(x) \\ \vdots \\ y_{[1]}^{(n-1)}(x) \end{matrix}}_{=T(y_{[1]})(x)} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \\ \ldots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} y_{[n]}(x) \\ y'_{[n]}(x) \\ \vdots \\ y_{[n]}^{(n-1)}(x) \end{matrix}}_{=T(y_{[n]})(x)} \end{matrix} \right) \ \neq \ 0$$

($W(x) =:$ **Wronskideterminante**). In diesem Fall gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Beweis: **1)** V_0 ist linearer Raum als Kern der linearen Abbildung

$$D : C^n(I \to \mathbb{R}) \to C(I \to \mathbb{R}) : y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y.$$

$T : V_0 \to \tilde{V}_0$ ist linear und bijektiv, also ein Vektorraum-Isomorphismus.
$\Rightarrow \ \dim(V_0) = \dim(\tilde{V}_0) \stackrel{2.37}{=} n$

2) T bildet Basen auf Basen ab. Damit folgt
$\{y_{[1]},\dots,y_{[n]}\}$ ist Fundamentalsystem von $(*)$ mit $g=0$
$\Leftrightarrow$ $\{T(y_{[1]}),\dots,T(y_{[n]})\}$ ist Fundamentalsystem von $(**)$ mit $g=0$
$\overset{2.40}{\Leftrightarrow}$ $W(x) := \det\big(T(y_{[1]})(x),\dots,T(y_{[n]})(x)\big) \neq 0$ für ein bzw. für alle $x\in I$. $\square$

2.60 Inhomogene Differentialgleichung: **1)** Sei V_0 der Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und y_{part} eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $(*)$. Dann ist

$$V_g \ := \ y_{\mathsf{part}} + V_0$$

der affine Raum aller Lösungen von $(*)$.

2) Variation der Konstanten: Ist $\big\{y_{[1]},\dots,y_{[d]}\big\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ist

$$y \ := \ c_1(x)\,y_{[1]} + \ldots + c_n(x)\,y_{[d]}$$

genau dann Lösung von $(*)$, wenn

$$\begin{pmatrix} y_{[1]}(x) & \dots & y_{[n]}(x) \\ y'_{[1]}(x) & \dots & y'_{[n]}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{[1]}^{(n-1)}(x) & \dots & y_{[n]}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}. \qquad (***)$$

Beweis: **1)** y_{part} löst $(*)$ $\Rightarrow$ $T(y_{\mathsf{part}})$ löst $(**)$
$\overset{2.44}{\Rightarrow}$ $\tilde V_g = \tilde V_0 + T(y_{\mathsf{part}})$
$\Rightarrow$ $V_g = T^{-1}(\tilde V_g) = T^{-1}(\tilde V_0) + y_{\mathsf{part}} = V_0 + y_{\mathsf{part}}$

2) $$(***) \ \Leftrightarrow \ \Big(T(y_{[1]})(x) \ \dots \ T(y_{[n]})(x)\Big)\cdot \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$
$\overset{2.45}{\Leftrightarrow}$ $u(x) = c_1(x)T(y_{[1]})(x) + \ldots + c_n(x)T(y_{[n]})(x)$ ist Lösung von $(**)$
$\Leftrightarrow$ $y(x) = u_1(x) = c_1(x)y_{[1]}(x) + \ldots c_n(x)y_{[n]}(x)$ ist Lösung von $(*)$ $\square$

2.61 Beispiel: $y''' + 3y'' - y' - 3y = \mathrm{e}^x$:

1) Zugehörige homogene Differentialgleichung: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$
Vortragsübung: $y_{\mathsf{hom}}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x}$, $c_j\in\mathbb{R}$
Fundamentalsystem: $\{x\mapsto \mathrm{e}^{-3x}, x\mapsto \mathrm{e}^x, x\mapsto\mathrm{e}^{-x}\}$, denn

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ -3\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \\ 9\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-3x}(1-9-3-9+1+3) = -16\mathrm{e}^{-3x} \neq 0$$

2) Inhomogene Differentialgleichung, Variation der Konstanten:
$y(x) = c_1(x)e^{-3x} + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_3(x)\mathrm{e}^{-x}$ ist genau dann Lösung, wenn

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ -3\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \\ 9\mathrm{e}^{-3x} & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_3' = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x},\ c_2' = \frac{1}{8},\ c_1' = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4x}.$$

Wähle $c_3 = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{2x},\ c_2 = \frac{1}{8}\,x,\ c_1 = \frac{1}{32}\,\mathrm{e}^{4x} \ \Rightarrow\ y(x) = \frac{1}{32}\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{8}\,x\mathrm{e}^x + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^x$

Wähle $y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{8}\,x\mathrm{e}^x$ (die anderen Summanden sind in y_{hom} enthalten).

3) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{1}{8}\,x\mathrm{e}^x + c_1\,\mathrm{e}^{-3x} + c_2\,\mathrm{e}^x + c_3\,\mathrm{e}^{-x},\ c_j \in \mathbb{R}$.

2.62 Reduktion der Ordnung *von D'Alembert:* Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\,y \;=\; 0. \tag{$*$}$$

Ist $y_{[1]}$ eine nichttriviale Lösung, so liefert der Ansatz $y(x) = c(x)y_{[1]}(x)$ eingesetzt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{(k)}(x) \cdot y_{[1]}^{(n-k)}(x) + \ldots + a_1(x)\big(c(x)y_{[1]}'(x) + c'(x)y_{[1]}(x) + a_0(x) \;=\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^{(k)}(x) \cdot y_{[1]}^{(n-k)}(x) + \ldots + a_1(x)c'(x)y_{[1]}(x)$$
$$+\, c(x)\big(y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\,y\big) \;=\; 0.$$

Da $y_{[1]}$ Lösung von $(*)$ ist, folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^{(k)}(x) \cdot y_{[1]}^{(n-k)}(x) + \ldots + a_1(x)c'(x)y_{[1]}(x) \;=\; 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für c'.

2.63 Beispiel: $y'' - \frac{5}{x}\,y' + \frac{9}{x^2}\,y = x^2$ für $x > 0$:

1) Homogen: $y'' - \frac{5}{x}\,y' + \frac{9}{x^2}\,y = 0$:

a) Probieren: $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0, 1$ einsetzen: $\Rightarrow\ y(x) = x^3$ ist Lösung.

b) Reduktion der Ordnung: Ansatz $y(x) = c(x)\,x^3$
$\Rightarrow\ y(x) = x^3 \ln x$ ist weitere Lösung,

c) Also Fundamentalsystem: $\{x \mapsto x^3, x \mapsto x^3 \ln x\}$,
$W(x) = \det \begin{pmatrix} x^3 & x^3 \ln x \\ 3x^2 & 3x^2 \ln x + x^2 \end{pmatrix} = x^5 \neq 0$ da $x > 0$.

2) Inhomogen, Ansatz nach Variation der Konstanten: $y_{\mathsf{part}} = c_1(x)\,y_{[1]} + c_2(x)\,y_{[2]}$ ist genau dann Lösung, wenn (vgl. 2.60)

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^3\ln x \\ 3x^2 & 3x^2\ln x + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_2' = 1,\ c_2' = -\ln x$$

Wähle $c_1 = -x\ln x + x,\ c_2 = x$

$$\Rightarrow\ y_{\mathsf{part}} = -x^4\ln|x| + x^4 + x^4\ln|x| = x^4.$$

3) Allgemeine Lösung der inhomomgenen Differentialgleichung:

$$y(x) = x^4 + c_1\,x^3 + c_2\,x^3\ln|x| \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

2.64 Konstante Koeffizienten: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Bestimme Fundamentalsystem zur Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y + a_0 \ = \ 0. \tag{$*$}$$

bzw. mit $u = T(y) = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ zum System

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot u \tag{$**$}$$

Wir wissen:

$$\begin{aligned} &\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\} \text{ Fundamentalsystem zu } (*) \\ \Leftrightarrow\ &\big\{T(y_{[1]}), \ldots, T(y_{[n]})\big\} \text{ Fundamentalsystem zu } (**) \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem zu $(**)$ enthält Elemente der Form

$$u(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\cdot v,\ u(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot w,\ u(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot \tilde{w}\ldots$$

$\Rightarrow$ Das Fundamentalsystem zu $(*)$ enthält Funktionen der Form

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x},\ y(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x},\ y(x) = x^2\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots$$

Also Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in $(*)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0) \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow\ &p(\lambda) \ := \ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \ = \ 0 \end{aligned}$$

p heißt **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung $(*)$. Es gilt

$$p(\lambda) \ = \ (-1)^n \det(A - \lambda\cdot E_{n\times n})$$

Wie erhält man aus den Nullstellen von p ein Fundamentalsystem zu $(*)$?

Fall 1) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist einfache Nullstelle von p: Wähle

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

als zugehöriges Element des Fundamentalsystems.

Fall 2) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist k-fache Nullstelle ($k \geq 2$) von p:
(Dann existiert zu λ als Eigenwert von A eine Hauptvektorkette der Länge k.)
Wähle

$$y_{[j]}(x) = x^j \mathrm{e}^{\lambda x},\ j = 0, \dots, k-1$$

als zugehörige Elemente des Fundamentalsystems.

Fall 3) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist k-fache Nullstelle ($k \geq 1$) von p:
Wähle

$$y_{[j]}(x) = x^j \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)x} \cos(\mathrm{Im}(\lambda)x) \text{ und } \tilde{y}_{[j]}(x) = x^j \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)x} \sin(\mathrm{Im}(\lambda)x),\ j = 0, \dots, k-1$$

als zugehörige Elemente des Fundamentalsystems.
(Da in diesem Fall auch $\overline{\lambda}$ $k-$fache Nullstelle ist, benötigen wir $2k$ zugehörige Elemente des Fundamentalsystems, und wir haben $2k$ Elemente gefunden.)

2.65 Beispiele: **1)** $y''' - y'' - y' + y = 0$: $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$
Fundamentalsystem: $\{x \mapsto \mathrm{e}^x,\ x \mapsto x\,\mathrm{e}^x,\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\}$.

2) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$: $p(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^2$, d.h. $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$ sind doppelte Nullstellen.
Fundamentalsystem: $\{x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x),\ x \mapsto x\cos(2x),\ x \mapsto x\sin(2x)\}$.