

3 Integration im $\mathbb{R}^d$

3.1 Partitionen

3.1 Definition: Seien $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$ für $j = 1, \dots, d$.

1) Dann heißt

$$\begin{aligned} I &= \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \\ &= \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \forall j \in \{1, \dots, d\} : a_j \leq x_j \leq b_j\} \end{aligned}$$

abgeschlossenes Intervall im $\mathbb{R}^d$ oder **abgeschlossenes d -dimensionales Intervall**. Die Menge

$$I^\circ := \prod_{j=1}^d]a_j, b_j[$$

heißt **Inneres** des Intervalls I .

2) Das **Maß** des Intervalls ist

$$\mu_d(I) = \mu_d\left(\prod_{j=1}^d [a_j, b_j]\right) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j).$$

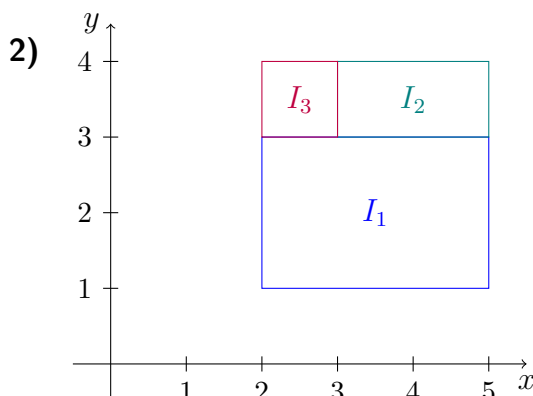
Falls $\exists j \in \{1, \dots, d\} : a_j = b_j$, so gilt $\mu_d(I) = 0$ und I heißt **Nullmenge**. In diesem Fall gilt $I^\circ = \emptyset$.

3) Die **Länge** von I wird durch

$$\delta(I) := \max_{1 \leq j \leq d} (b_j - a_j)$$

definiert.

3.2 Beispiele: 1) $n = 3: I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \Rightarrow \mu_3(I) = 6$.



$$I_1 = [2, 5] \times [1, 3]$$

$$I_2 = [3, 5] \times [3, 4]$$

$$I_3 = [2, 3] \times [3, 4]$$

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [2, 5] \times [1, 4]$$

$$I_1 \cap I_2 = [3, 5] \times [3, 3] \text{ Nullmenge}$$

3.3 Bemerkungen: 1) Setzt man $I' := \prod_{j=1}^{d-1} [a_j, b_j]$, so gelten

$$I = I' \times [a_d, b_d] \quad \text{und} \quad \mu_d(I) = \underbrace{(b_d - a_d)}_{=\mu_1([a_d, b_d])} \mu_{d-1}(I').$$

2) Für $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist

$$\chi_M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** von M .

Mit I' wie vorher gilt

$$\chi_I(x', x_d) = \chi_{I'}(x') \cdot \chi_{[a_d, b_d]}(x_d) \quad \text{für } (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}.$$

3) $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossene Intervalle $\Rightarrow I_1 \cap I_2$ ist ein abgeschlossenes Intervall oder $\emptyset$.

3.4 Definition: Seien $I, I_1, \dots, I_n$ Intervalle. $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ heißt **Partition** von I , falls

$$I = \bigcup_{k=1}^n I_k \wedge \mu_d(I_k \cap I_l) = 0 \text{ für } k \neq l.$$

Das **Feinheitsmaß** von P ist durch

$$\Delta(P) := \max_{1 \leq k \leq n} \delta(I_k)$$

definiert. Ist $P' = \{I'_1, \dots, I'_m\}$ eine weitere Partition von I , so heißt P' **Verfeinerung** von P , wenn

$$\forall k \in \{1, \dots, m\} \exists j \in \{1, \dots, n\} : I'_k \subseteq I_j$$

gilt.

3.5 Satz: Seien die Voraussetzungen wie vorher.

1) Ist P' Verfeinerung von P , so folgt $\Delta(P') \leq \Delta(P)$.

2) Die Menge

$$P'' := \{I'_k \cap I_j : 1 \leq k \leq m \wedge 1 \leq j \leq n\} \setminus \{\emptyset\}$$

ist eine Partition von I und eine Verfeinerung von P und P' , die **gemeinsame Verfeinerung** von P und P' .

3.6 Satz: Ist $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ eine Partition von I , so gilt

$$\mu_d(I) = \sum_{k=1}^n \mu_d(I_k)$$

3.2 Riemann-Integrierbarkeit

3.7 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Ist $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ eine Partition von I und $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \dots, n$ ein Menge von Stützpunkten zu P , so heißt

$$S(f, P, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mu_d(I_k)$$

eine **Riemannsche Summe** von f bezüglich P .

- 2) Existiert eine Zahl $J \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall P = \text{Partition von } I \text{ mit } \Delta(P) < \delta_\varepsilon \\ \forall \xi = \text{Menge von Stützpunkten zu } P : |S(f, P, \xi) - J| < \varepsilon, \end{aligned}$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** über I , und J heißt **Riemann-Integral** von f über I .
Schreibe $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_I f(x) dx := J.$$

3.8 Satz: Seien $f, g \in \mathcal{R}(I)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann:

- 1) $f + g, c \cdot f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_I (f + g)(x) dx = \int_I f(x) dx + \int_I g(x) dx, \quad \int_I (c \cdot f)(x) dx = c \int_I f(x) dx$$

- 2) $f(x) \geq g(x)$ auf $I \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$,

$$\text{insbesondere: } f(x) \geq 0 \text{ auf } I \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq 0.$$

- 3) $f(x) = g(x)$ auf einer in I dichten Menge $\Rightarrow \int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx$.

- 4) f ist beschränkt (auf I).

Beweis zu 4): Annahme: $f \in \mathcal{R}(I)$ und f ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge (x_n) in I , so dass $f(x_n) \rightarrow \infty$ (oder $f(x_n) \rightarrow -\infty$, eventuell Teilfolge).

I kompakt $\Rightarrow (x_n)$ kann als konvergent angenommen werden: $x_n \rightarrow x \in I$ (eventuell Teilfolge).

Zu irgendeinem $\varepsilon > 0$ wähle Partition $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ und der Eigenschaft $x \in I_{k_0}^\circ$ für ein k_0 .

$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \in I_{k_0}$ für $n > N$.

Zu P sei eine feste Stützpunktemenge $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ gegeben. Ersetze ξ_{k_0} durch x_n :

$$\xi^{(n)} := \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, x_n, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n\}$$

Für $n > N$ ist $\xi^{(n)}$ Stützpunktemenge zu P .

Definition R-Integrierbarkeit $\Rightarrow |S(f, P, \xi^{(n)}) - \int_I f(x) dx| < \varepsilon$ für $n > N$

$$S(f, P, \xi^{(n)}) = \sum_{k=1, k \neq k_0}^n f(\xi_k) \mu_d(I_k) + f(x_n) \mu_d(I_{k_0}) \rightarrow \infty \text{ (oder } \rightarrow -\infty)$$

Krasser Widerspruch!.

□

3.9 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ Partition von I . Mit

$$m_k(f) := \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k(f) := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

werden die **Untersumme** von f bezüglich P durch

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^n m_k(f) \mu_d(I_k)$$

und die **Obersumme** von f bezüglich P durch

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{k=1}^n M_k(f) \mu_d(I_k)$$

definiert. Dann heißt

$$\begin{aligned} \int_{\overline{I}} f(x) \, dx &:= \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \text{ Partition von } I \} \\ \int_I f(x) \, dx &:= \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \text{ Partition von } I \} \end{aligned}$$

unteres bzw. oberes Darboux-Integral von f über I .

3.10 Satz: Es gilt $\int_{\overline{I}} f(x) \, dx \leq \int_I f(x) \, dx$.

Beweis: 1) Ist P' Verfeinerung von P , so gilt

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P') \leq \overline{S}(f, P') \leq \overline{S}(f, P)$$

2) Sind P_1, P_2 Partitionen von I mit gemeinsamer Verfeinerung P' (vgl. 3.5), so gilt

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \underline{S}(f, P') \leq \overline{S}(f, P') \leq \overline{S}(f, P_2)$$

3) Nun folgt

$$\sup_{P_1} \{ \underline{S}(f, P_1) \} \leq \overline{S}(f, P_2)$$

für beliebige Partitionen P_2 von I und

$$\sup_{P_1} \{ \underline{S}(f, P_1) \} \leq \inf_{P_2} \{ \overline{S}(f, P_2) \}.$$

□

3.11 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Gilt

$$\int_{\bar{I}} f(x) \, dx = \int_I f(x) \, dx$$

so heißt f **D-integrierbar** über I . In diesem Fall schreibe

$$\mathrm{D}\text{-}\int_I f(x) \, dx := \int_{\bar{I}} f(x) \, dx = \int_I f(x) \, dx$$

für das **Darboux-Integral**.

3.12 Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle Partitionen P von I mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}} f(x) \, dx - \varepsilon &< \underline{S}(f, P) \leq \int_{\bar{I}} f(x) \, dx \\ \int_I f(x) \, dx &\leq \underline{S}(f, P) < \int_I f(x) \, dx + \varepsilon \end{aligned}$$

gilt.

Beweis: (im Fall $d = 2$ für die erste Ungleichung)

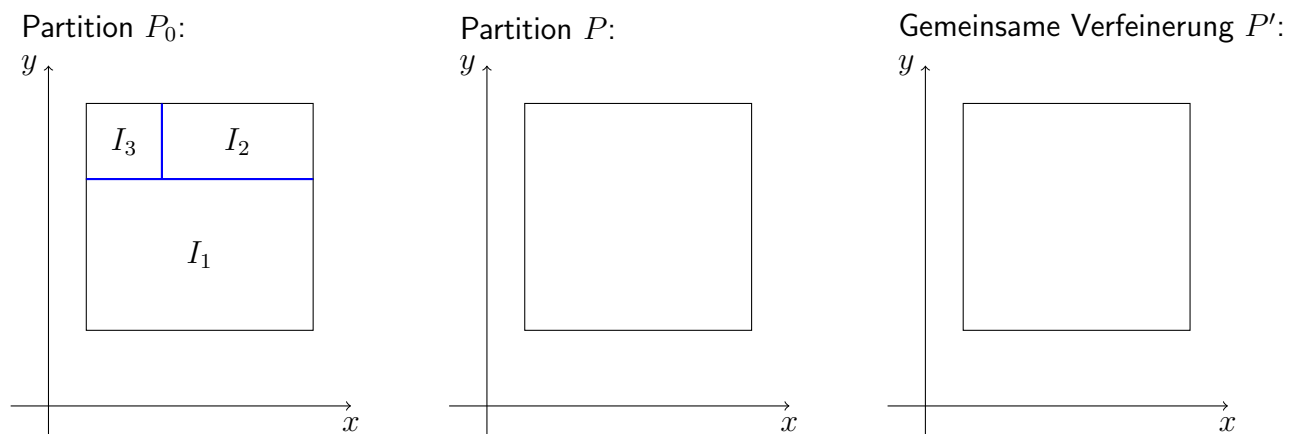
Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle Partition P_0 von I mit

$$\int_{\bar{I}} f(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, P_0)$$

Sei $L :=$ Gesamtlänge der [Trennstrecken](#) in P_0 . Definiere

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2L \sup_{x \in I} |f(x)|}.$$

Für eine Partition P mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ betrachte die gemeinsame Verfeinerung P' von P_0 und P .



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P) &= \sum_k \overbrace{(m'_k(f) - m_{l_k}(f))}^{=0 \text{ im grünen Bereich}} \mu_d(I'_k) \\
 &\quad \text{Infimum von } f(x) \\
 &\quad \text{über das Intervall} \\
 &\quad I_{l_k} \text{ mit } I'_k \subseteq I_{l_k} \\
 &= \sum_{k \in \overbrace{\{ \dots \}}^{\leq \sup_{x \in I} |f(x)|}} (m'_k(f) - m_{l_k}(f)) \mu_d(I'_k) \\
 &\leq \sup_{x \in I} |f(x)| \underbrace{\sum_{k \in \{ \dots \}} \mu_d(I'_k)}_{< L \cdot \delta_\varepsilon} \\
 &< \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{I}} f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, P_0) \stackrel{P' \text{ Verfeinerung}}{\leq} \underline{S}(f, P') < \underline{S}(f, P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

□

3.13 Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f \in \mathcal{R}(I)$
- (ii) f ist beschränkt und Darboux-integrierbar über I .

In diesem Fall gilt

$$\text{D-} \int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Für $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ folgt aus Satz 3.12 für jede Wahl von ξ

$$\underbrace{\int_{\bar{I}} f(x) dx}_{= \text{D-} \int_I f(x) dx} - \varepsilon \stackrel{3.12}{<} \underline{S}(f, P) \stackrel{m_k(f) \leq f(\xi_k)}{\leq} S(f, P, \xi) \stackrel{f(\xi_k) \leq M_k(f)}{\leq} \overline{S}(f, P) \stackrel{3.12}{<} \underbrace{\int_I f(x) dx}_{= \text{D-} \int_I f(x) dx} + \varepsilon$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\stackrel{3.8}{\Rightarrow}$ f ist beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle eine Partition P mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ für Satz 3.12, so dass zusätzlich

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_I f(x) dx \right| < \varepsilon$$

für jede Wahl der Stützpunktemenge ξ gilt. Wähle zunächst ξ so, dass die Werte $f(\xi_k)$ nahe an $M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$ liegen und

$$\left| S(f, P, \xi) - \overline{S}(f, P) \right| < \varepsilon$$

gilt.

$$\Rightarrow \int_I f(x) dx \leq \bar{S}(f, P) < S(f, P, \xi) + \varepsilon < \int_I f(x) dx + 2\varepsilon.$$

Wähle nun $\tilde{\xi}$ so, dass die Werte $f(\tilde{\xi}_k)$ nahe an $m_k(f)$ liegen und

$$|S(f, P, \tilde{\xi}) - \underline{S}(f, P)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \underline{S}(f, P) > S(f, P, \tilde{\xi}) - \varepsilon > \int_I f(x) dx - 2\varepsilon.$$

Insgesamt folgt

$$\int_I f(x) dx - 2\varepsilon < \int_I f(x) dx \stackrel{3.10}{\leq} \int_I f(x) dx < \int_I f(x) dx + 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

□

3.3 Kriterien für Integrierbarkeit

3.14 Riemann-Kriterium: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f \in \mathcal{R}(I)$
- (ii) f ist beschränkt und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P = \text{Partition von } I : \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

Beweis: Vgl. letzter Beweis

3.15 Definition: $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Nullmenge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine höchstens abzählbare Menge von abgeschlossenen Intervallen $\{I_1, I_2, \dots\}$ existiert, so dass

$$M \subseteq \bigcup_k I_k^\circ \wedge \sum_k \mu_d(I_k) < \varepsilon.$$

3.16 Folgerung: 1) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

2) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Nullmenge und $M' \subseteq M \Rightarrow M'$ ist Nullmenge.

3.17 Beispiele: 1) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich oder abzählbar $\Rightarrow M$ ist Nullmenge.

Für $M = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$:

$$I_k := x_k + \prod_{j=1}^d \left[-\frac{\delta}{k^2}, \frac{\delta}{k^2} \right] \Rightarrow M \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k^\circ \wedge \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_d(I_k) = (2\delta)^d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2d}},$$

wähle $\delta > 0$ genügend klein.

2) $M =]-\infty, \infty[\times [a, a] \subseteq \mathbb{R}^2$ ist Nullmenge:

$$I_k := [-k, k] \times \left[a - \frac{\varepsilon}{k^3}, a + \frac{\varepsilon}{k^3} \right] \Rightarrow M \subseteq \bigcup_k I_k \wedge \sum_k \mu_2(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\varepsilon}{k^3} = 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

3.18 Lebesgue-Kriterium: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}(I)$

(ii) f ist beschränkt und fast überall stetig auf I , d.h.

$$\exists M \subseteq I : M \text{ ist Nullmenge und } f \text{ ist stetig in jedem } x \in I \setminus M.$$

3.19 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

1) Für $M \subseteq I$, $M \neq \emptyset$ heißt

$$\begin{aligned} \Omega_f(M) &:= \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x) \\ &= \sup \{ f(x) - f(y) : x, y \in M \} \\ &= \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in M \} \end{aligned}$$

die **Oszillation** von f auf M .

2) Für $x \in I$ heißt

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \Omega_f(B_\delta(x) \cap I)$$

($B_\delta(x) = \{y : \|y - x\| < \delta\}$) die **Oszillation** von f in x . (Der Grenzwert existiert, da $\delta \mapsto \Omega_f(B_\delta(x) \cap I)$ monoton wachsend und nach unten beschränkt (≥ 0) ist.)

3.20 Folgerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Für $x \in I$ gilt

$$f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \omega_f(x) = 0.$$

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Sei f stetig in x und $\varepsilon > 0$ fest. Zeige $\omega_f(x) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } x &\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall \tilde{x} \in B_\delta(x) \cap I : |f(\tilde{x}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \Omega_f(B_\delta(x) \cap I) = \sup \{|f(y) - f(z)| : y, z \in B_\delta(x) \cap I\} \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \omega_f(x) \leq \Omega_f(B_\delta(x) \cap I) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ": Sei $\omega_f(x) = 0$, $\varepsilon > 0$.

$$\omega_f(x) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \Omega_f(B_\delta(x) \cap I) < \varepsilon$$

$$\text{d.h. } \sup \{|f(y) - f(z)| : y, z \in B_\delta(x) \cap I\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall y \in B_\delta(x) \cap I : |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

3.21 Satz: Sei $\Delta(f) := \{x \in I : f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ und

$$\Delta_\varepsilon(f) := \{x \in I : \omega_f(x) \geq \varepsilon\} \text{ für } \varepsilon > 0.$$

$$\text{Dann gilt } \Delta(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f).$$

3.22 Satz: Δ_ε ist kompakt

Beweis: Zeige: $\Delta_\varepsilon(f)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

1) $\Delta_\varepsilon(f) \subseteq I \Rightarrow \Delta_\varepsilon(f)$ ist beschränkt.

2) Zeige: $\mathbb{R}^d \setminus \Delta_\varepsilon(f)$ ist offen.

Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Delta_\varepsilon(f)$

Fall $\tilde{x} \notin I \Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(\tilde{x}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus I \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \Delta_\varepsilon(f)$

Fall $\tilde{x} \in I \setminus \Delta_\varepsilon(f) \Rightarrow \omega_f(\tilde{x}) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \Omega_f(B_\delta(\tilde{x}) \cap I) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall y \in B_\delta(\tilde{x}) \cap I : \omega_f(y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow B_\delta(\tilde{x}) \cap I \subseteq I \setminus \Delta_\varepsilon(f)$$

$$\Rightarrow B_\delta(\tilde{x}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \Delta_\varepsilon(f)$$

□

Beweis von 3.18: (ii) $\Rightarrow$ (i): f beschränkt $\Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in I : |f(x)| \leq K$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Zeige: $\exists$ Partition $P : \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

(Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt nach dem Riemann-Kriterium $f \in \mathcal{R}(I)$.)

$$(ii) \Rightarrow \Delta(f) \text{ Nullmenge} \Rightarrow \exists J_1, J_2, \dots \text{ abg. Intervalle : } \Delta(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^\circ \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \mu_d(J_k) < \frac{\varepsilon}{4K}$$

In jedem $x \in I \setminus \Delta(f)$ ist f stetig

$$\Rightarrow \exists I_x \subseteq \mathbb{R}^d, I_x \text{ abgeschlossenes Intervall} : x \in I_x^\circ \wedge \forall \tilde{x} \in I_x^\circ \cap I : |f(\tilde{x}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4\mu_d(I)}$$

$$\Rightarrow \Omega_f(I_x^\circ \cap I) < 2 \frac{\varepsilon}{4\mu_d(I)}$$

$\Rightarrow \{J_k^\circ : k \in \mathbb{N}\} \cup \{I_x^\circ : x \in I \setminus \Delta(f)\}$ ist offene Überdeckung von I

$\Rightarrow I \subseteq J_{k_1}^\circ \cup \dots \cup J_{k_r}^\circ \cup I_{x_1}^\circ \cup \dots \cup I_{x_s}^\circ$ da I kompakt

Wähle Partition $P = \{\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_n\}$ von I so fein, dass

$$\forall j = 1, \dots, n \exists m : \tilde{I}_j \subseteq J_{k_m}^\circ \vee \tilde{I}_j \subseteq I_{x_m}^\circ$$

$$\Rightarrow \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \mu_d(\tilde{I}_j) = \sum_1 + \sum_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{\{j \mid \exists m: \tilde{I}_j \subseteq J_{k_m}^\circ\}} \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq 2K} \mu_d(\tilde{I}_j) \\ &\leq 2K \sum_{\{j \mid \exists m: \tilde{I}_j \subseteq J_{k_m}^\circ\}} \mu_d(\tilde{I}_j) \leq 2K \sum_{k=1}^{\infty} \mu_d(J_k) < 2K \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \sum_2 &= \sum_{\{j \mid \exists m: \tilde{I}_j \subseteq I_{x_m}^\circ\}} \underbrace{(M_j - m_j)}_{= \Omega_f(\tilde{I}_j) \leq \Omega_f(I_{x_m} \cap I)} \mu_d(\tilde{I}_j) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\mu_d(I)} \sum_{\{j \mid \exists m: \tilde{I}_j \subseteq I_{x_m}^\circ\}} \mu_d(\tilde{I}_j) \leq \frac{\varepsilon}{2\mu_d(I)} \sum_{j=1}^n \mu_d(\tilde{I}_j) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Partition P gefunden mit $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\Rightarrow f$ ist beschränkt.

Zeige: $\Delta(f)$ ist Nullmenge.

$$\Delta(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f) \Rightarrow \text{es genügt zu zeigen: } \Delta_{1/k}(f) \text{ ist Nullmenge.}$$

O.B.d.A. $\Delta_{1/k}(f) \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$ fest

Wähle Partition $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ von I mit $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2k}$

Definiere $M := \{I_j \in P : \Delta_{1/k}(f) \cap I_j \neq \emptyset\} \subseteq P$

$$\Rightarrow \Delta_{1/k}(f) \subseteq \bigcup_{j: I_j \in M} I_j$$

Zerlege $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{I_j \in M : \Delta_{1/k}(f) \cap I_j^\circ \neq \emptyset\} \\ M_2 &:= \{I_j \in M : \Delta_{1/k}(f) \cap I_j^\circ = \emptyset\} \end{aligned}$$

Für $I_j \in M_1$ und $x \in I_j^\circ \cap \Delta_{1/k}(f)$ gilt

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : B_\delta(x) &\subseteq I_j^\circ \wedge \Omega_f(B_\delta(x) \cap I) \geq \frac{1}{k} \\ \Rightarrow M_j - m_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \geq \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{\{j: I_j \in M_1\}} \mu_d(I_j) &\leq \sum_{\{j: I_j \in M_1\}} (M_j - m_j) \mu_d(I_j) \\ &\leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2k} \\ \Rightarrow \sum_{\{j: I_j \in M_1\}} \mu_d(I_j) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Für $I_j \in M_2$ gilt: $\Delta_{1/k}(f) \cap I_j \subseteq I_j \setminus I_j^\circ = \text{Nullmenge}$.

$$\Rightarrow \exists \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots \text{ abg. Intervalle : } \bigcup_{j=1}^n I_j \setminus I_j^\circ \subseteq \bigcup_j \tilde{I}_j^\circ \wedge \sum_j \mu_d(\tilde{I}_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{1/k}(f) &\subseteq \bigcup_{\{j: I_j \in M_1\}} I_j \cup \bigcup_{\{j: I_j \in M_2\}} I_j \setminus I_j^\circ \\ &\subseteq \bigcup_{\{j: I_j \in M_1\}} I_j^\circ \cup \bigcup_{j=1}^n I_j \setminus I_j^\circ \subseteq \bigcup_{\{j: I_j \in M_1\}} I_j^\circ \cup \bigcup_j \tilde{I}_j^\circ \end{aligned}$$

und

$$\sum_{\{j: I_j \in M_1\}} \mu_d(I_j) + \sum_j \mu_d(\tilde{I}_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.23 Folgerungen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.
- 2) $f \in \mathcal{R}(I) \wedge \text{Bild}(f) \subseteq [a, b] \wedge g \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{R}(I)$.
- 3) $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(I)$. Außerdem

$$\left| \int_I f(x) \, dx \right| \leq \int_I |f(x)| \, dx.$$

- 4) $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$.

- 5) $f \in \mathcal{R}(I) \wedge |f(x)| \geq c > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{R}(I)$.

- 6) $f \in \mathcal{R}(I) \wedge P = \{I_1, \dots, I_n\}$ Partition von I

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall k = 1, \dots, n : f \in \mathcal{R}(I_k) \\ \int_I f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} f(x) \, dx \end{cases}$$

3.24 Satz von Fubini: Seien I_x, I_y abgeschlossene p - bzw. q -dimensionale Intervalle und $I = I_x \times I_y \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$. Ist $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$, und existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y) \, dx \text{ für jedes feste } y \in I_y$$

(kurz: $f(\cdot, y) \in \mathcal{R}(I_x)$ für jedes $y \in I_y$), so folgen $g \in \mathcal{R}(I_y)$ und

$$\int_{I_y} g(y) \, dy = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_I f(x, y) \, d(x, y).$$

Beweis: Seien $P_x = \{I_1, \dots, I_n\}$ Partition von I_x , $P_y = \{\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_m\}$ Partition von I_y .

$$\Rightarrow P := \{I_j \times \tilde{I}_k : 1 \leq j \leq n \wedge 1 \leq k \leq m\} \text{ ist Partition von } I, \\ \Delta(P) = \max\{\Delta(P_x), \Delta(P_y)\}$$

Zu $g : I_y \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_{I_x} f(x, y) \, dx$ betrachte die Riemannsumme

$$S(g, P_y, \xi) = \sum_{k=1}^m g(\xi_k) \mu_q(\tilde{I}_k).$$

Setze

$$m_{jk} := \inf_{I_j \times \tilde{I}_k} f(x, y), \quad M_{jk} := \sup_{I_j \times \tilde{I}_k} f(x, y)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m_{jk} \leq f(x, \xi_k) \leq M_{jk} \text{ für } x \in I_j \\ \text{Integral über } I_j &\Rightarrow m_{jk} \mu_p(I_j) \leq \int_{I_j} f(x, \xi_k) \, dx \leq M_{jk} \mu_p(I_j) \\ &\Rightarrow m_{jk} \mu_p(I_j) \mu_q(\tilde{I}_k) \leq \int_{I_j} f(x, \xi_k) \, dx \mu_q(\tilde{I}_k) \leq M_{jk} \mu_p(I_j) \mu_q(\tilde{I}_k) \\ \text{summieren} &\Rightarrow \sum_{j=1}^n m_{jk} \mu_{p+q}(I_j \times \tilde{I}_k) \leq \underbrace{\int_{I_x} f(x, \xi_k) \, dx \mu_q(\tilde{I}_k)}_{=g(\xi_k)} \leq \sum_{j=1}^n M_{jk} \mu_{p+q}(I_j \times \tilde{I}_k) \\ \text{summieren} &\Rightarrow \underbrace{\sum_{j,k} m_{jk} \mu_{p+q}(I_j \times \tilde{I}_k)}_{\text{Untersumme zur Partition } P} \leq \sum_k g(\xi_k) \mu_q(\tilde{I}_k) \leq \underbrace{\sum_{j,k} M_{jk} \mu_{p+q}(I_j \times \tilde{I}_k)}_{\text{Obersumme zur Partition } P} \\ &\Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq S(P_y, f, \xi) \leq \overline{S}(f, P) \\ \text{Satz 3.12} &\quad \text{für } \Delta(P) < \delta_\varepsilon \quad \int_I f(x, y) \, d(x, y) - \varepsilon \leq S(P_y, f, \xi) \leq \int_I f(x, y) \, d(x, y) + \varepsilon \end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der Stützpunktemenge ξ .

$$\Rightarrow g \in \mathcal{R}(I_y) \text{ und } \int_{I_y} g(y) \, dy = \int_I f(x, y) \, d(x, y).$$

□

3.25 Folgerung:

Ist $I = \prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$ und $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$, so gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \dots, x_d) \, dx_d \right) dx_{d-1} \dots dx_2 \right) dx_1.$$

und die Reihenfolge der Integrationen ist beliebig vertauschbar.

3.26 Beispiel: $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$, $f(x, y, z) = xy^2 + z^3$

$$\begin{aligned} \int_I f(\xi) \, d\xi &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 \underbrace{\int_{z=0}^3 (xy^2 + z^3) \, dz}_{x, y \text{ als Konstante behandeln}} \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 \underbrace{\left[xy^2 z + \frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^3}_{=3xy^2 + \frac{81}{4}} \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \underbrace{\left[xy^3 + \frac{81}{4} y \right]_{y=0}^2}_{=8x + \frac{81}{2}} \, dx \\ &= \left[4x^2 + \frac{81}{2} x \right]_{x=0}^1 \\ &= 4 + \frac{81}{2} = \frac{89}{2} \end{aligned}$$

3.4 Das Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen

3.27 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Wir bezeichnen die Fortsetzung von f durch Null mit

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2) Seien M beschränkt und $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M$. Dann heißt f **Riemann-integrierbar (R-integrierbar)** über M , falls f_M über I Riemann-integrierbar ist, und

$$\int_M f(x) \, dx := \int_I f_M(x) \, dx.$$

heißt das **Riemann-Integral** von f über M . Schreibe $f \in \mathcal{R}(M)$.

3) Falls $M = \emptyset$: $\int_{\emptyset} f(x) \, dx := 0$ für beliebige Funktionen f .

3.28 Bemerkung: Sowohl die Definition der R-Integrierbarkeit als auch der Wert von $\int_M f(x) dx$ hängen nicht vom gewählten Intervall I ab.

3.29 Definiton: $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Jordan-messbar**, falls die Funktion $1 : M \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$ über M R-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$|M| := \int_M 1 dx = \int_{I \supseteq M} \underbrace{1_M(x)}_{=\chi_M(x) \text{ charakteristische Funktion von } M} dx$$

der d -dimensionale **Jordan-Inhalt** von M , für $d = 2$ auch Flächeninhalt bzw. für $d = 3$ auch Volumen von M .

3.30 Interpretation: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt, $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M$, $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ Partition von I . Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}(\chi_M, P) &= \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} \chi_M(x) \cdot \mu_d(I_k) = \sum_{\{k: I_k \subseteq M\}} \mu_d(I_k), \\ \overline{S}(\chi_M, P) &= \sum_{\{k: I_k \cap M \neq \emptyset\}} \mu_d(I_k). \end{aligned}$$

Man nennt

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(M) &:= \sup_P \underline{S}(\chi_M, P) = \int_{\overline{I}} \chi_M(x) dx \\ \overline{\mu}(M) &:= \inf_P \overline{S}(\chi_M, P) = \int_I \chi_M(x) dx \end{aligned}$$

den **inneren** bzw. **äußeren Inhalt** von M .

3.13 $\Rightarrow$ M ist genau dann Jordan-messbar, wenn $\underline{\mu}(M) = \overline{\mu}(M)$ gilt. Dann gilt $|M| = \underline{\mu}(M) = \overline{\mu}(M)$.

3.31 Satz: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt, so ist M genau dann Jordan-messbar, wenn $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ eine Nullmenge ist.

Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M$.

$$\chi_M \in \mathcal{R}(I) \stackrel{3.18}{\Leftrightarrow} \chi_M \text{ fast überall stetig}$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \chi_M|_{M^\circ} \text{ ist stetig} \\ \chi_M|_{I \setminus \overline{M}} \text{ ist stetig} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_M \text{ ist genau für } x \in \partial M \text{ unstetig}$$

□

3.32 Lebesguesches Integralkriterium: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(M)$ genau dann, wenn f beschränkt und fast überall stetig ist.

Beweis: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M$. Aus

$$\underbrace{\{x \in I : f_M \text{ ist unstetig in } x\}}_{=: U_f} \subseteq \underbrace{\{x \in M : f \text{ ist unstetig in } x\}}_{=: u_f} \cup \underbrace{\partial M}_{\text{Nullmenge}}$$

und

$$U_f \supseteq u_f$$

folgt U_f Nullmenge $\Leftrightarrow u_f$ Nullmenge.

Also: $f \in \mathcal{R}(M) \Leftrightarrow f_M \in \mathcal{R}(I) \stackrel{3.18}{\Leftrightarrow} U_f \text{ Nullmenge} \Leftrightarrow u_f \text{ Nullmenge}$

□

3.33 Folgerungen: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $f, g \in \mathcal{R}(M)$, $c \in \mathbb{R}$. Dann:

- 1) $f + g \in \mathcal{R}(M) \wedge \int_M (f(x) + g(x)) \, dx = \int_M f(x) \, dx + \int_M g(x) \, dx,$
- 2) $c \cdot f \in \mathcal{R}(M) \wedge \int_M c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_M f(x) \, dx,$
- 3) $|f| \in \mathcal{R}(M) \wedge \left| \int_M f(x) \, dx \right| \leq \int_M |f(x)| \, dx,$
- 4) $f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{R}(M),$
- 5) Falls zusätzlich $|g(x)| \geq d > 0$: $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(M),$
- 6) $f \leq g \text{ auf } M \Rightarrow \int_M f(x) \, dx \leq \int_M g(x) \, dx.$

3.34 Mittelwertsatz: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $f \in \mathcal{R}(M)$. Dann:

$$\inf_{x \in M} f(x) \cdot |M| \leq \int_M f(x) \, dx \leq \sup_{x \in M} f(x) \cdot |M|.$$

Beweis: Es gilt $\inf_{x \in M} f(x) \leq f(y) \leq \sup_{x \in M} f(x)$ für $y \in M$

Verwende 3.33 und $\int_M c \, dx = c \cdot |M|.$

□

3.35 Satz: $M, N \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar $\Rightarrow M \cup N, M \cap N, M \setminus N$ Jordan-messbar.

Beweis: $M \cup N, M \cap N, M \setminus N$ sind beschränkt

$\partial(M \cup N) \subseteq \underbrace{\partial M \cup \partial N}_{\text{Nullmenge nach 3.31}}$, denn

$$\begin{aligned} \overline{M \cup N} \setminus (M \cup N)^\circ &= (\overline{M \cup N}) \setminus (M \cup N)^\circ = \overline{M} \setminus (M \cup N)^\circ \cup \overline{N} \setminus (M \cup N)^\circ \\ &\stackrel{(M \cup N)^\circ \supseteq M^\circ}{\subseteq} \overline{M} \setminus M^\circ \cup \overline{N} \setminus N^\circ = \partial M \cup \partial N. \end{aligned}$$

Entsprechend $\partial(M \setminus N), \partial(M \cap N) \subseteq \partial M \cup \partial N$

$\stackrel{3.31}{\Rightarrow}$ alle Jordan-messbar. □

3.36 Satz: $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar $\wedge f \in \mathcal{R}(M) \wedge N \subseteq M \wedge N$ Jordan-messbar $\Rightarrow f|_N \in \mathcal{R}(N)$.

Beweis: Verwende 3.32. □

3.37 Satz: Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar $\wedge f : M \cup N \rightarrow \mathbb{R} \wedge f|_M \in \mathcal{R}(M) \wedge f|_N \in \mathcal{R}(N)$. Dann folgt $f \in \mathcal{R}(M \cup N)$ und

$$\int_{M \cup N} f(x) dx = \int_M f(x) dx + \int_N f(x) dx - \int_{M \cap N} f(x) dx.$$

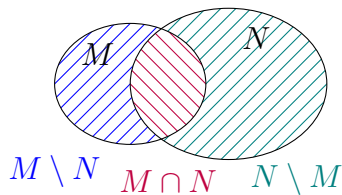
Beweis: 1) $M \cup N$ Jordan-messbar nach 3.35

f fast überall stetig auf M bzw. auf $N \Rightarrow f$ ist stetig f.ü. auf $M \cup N \stackrel{3.32}{\Rightarrow} f \in \mathcal{R}(M \cup N)$.

2) Fall $M \cap N = \emptyset$: Dann $f_{M \cup N} = f_M + f_N$. Sei $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M \cup N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{M \cup N} f(x) dx &= \int_I f_{M \cup N}(x) dx = \int_I (f_M(x) + f_N(x)) dx \\ &= \int_I f_M(x) dx + \int_I f_N(x) dx = \int_M f(x) dx + \int_N f(x) dx \end{aligned}$$

3) Allgemeiner Fall: Benütze



$$M \cup N = M \setminus N \dot{\cup} (M \cap N) \dot{\cup} N \setminus M$$

($\dot{\cup}$ = disjunkte Vereinigung)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{M \cup N} f(x) dx &\stackrel{2)}{=} \underbrace{\int_{M \setminus N} f(x) dx + \int_{M \cap N} f(x) dx}_{\stackrel{2)}{=} \int_M f(x) dx} \\ &\quad + \underbrace{\int_{N \setminus M} f(x) dx + \int_{M \cap N} f(x) dx}_{\stackrel{2)}{=} \int_N f(x) dx} - \int_{M \cap N} f(x) dx \end{aligned}$$

□

3.38 Folgerung: Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar. Dann:

- 1) $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$,
- 2) $N \subseteq M \Rightarrow |M| = |M \setminus N| + |N| \Rightarrow |M \setminus N| = |M| - |N|$,
insbesondere $|N| \leq |M|$.

3.39 Satz: Für $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- (i) M beschränkt und Jordan-messbar und $|M| = 0$, d.h. M ist **Jordan-Nullmenge**.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossene Intervalle : $M \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k \wedge \sum_{k=1}^n \mu_d(I_k) < \varepsilon$.
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossene Intervalle : $M \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k^\circ \wedge \sum_{k=1}^n \mu_d(I_k) < \varepsilon$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\Rightarrow \bar{\mu}(M) \stackrel{3.30}{=} |M| = 0$

$\Rightarrow$ Zu kompaktem Intervall $I \supseteq M$ existiert Partition P mit $\bar{S}(\chi_M, P) < \bar{\mu}(M) + \varepsilon = \varepsilon$

$\Rightarrow M \subseteq \bigcap \{I \in P : I \cap M \neq \emptyset\}$ und $\sum_{\{I \in P : I \cap M \neq \emptyset\}} \mu_d(I) = \bar{S}(\chi_M, P) < \varepsilon$ (vgl. 3.30)

$\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vergrößere alle I_k , so dass $M \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k^\circ$.

Vergrößerung so klein wählen, dass $\sum_{k=1}^n \mu_d(I_k) < \varepsilon$ bleibt.

(iii) $\Rightarrow$ (i): (iii) $\Rightarrow M$ ist beschränkt und ∂M ist Nullmenge, denn

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k^\circ \Rightarrow \partial M \subseteq \overline{M} \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k \stackrel{\text{wie (ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}{\subseteq} \bigcup_{k=1}^n \tilde{I}_k^\circ \text{ mit } \sum_{k=1}^n \mu_d(\tilde{I}_k) < \varepsilon$$

$\Rightarrow M$ ist Jordan-messbar.

Außerdem: $M \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k^\circ \stackrel{3.38}{\Rightarrow} |M| \leq \left| \bigcup_{k=1}^n I_k^\circ \right| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|I_k|}_{=\mu_d(I_k)} < \varepsilon \Rightarrow |M| = 0$.

□

3.40 Folgerung: 1) Jede Jordan-Nullmenge ist Nullmenge.

2) Jede endliche Vereinigung von Jordan-Nullmengen ist Jordan-Nullmenge.

3) Jede Teilmenge einer Jordan-Nullmenge ist Jordan- Nullmenge.

3.41 Folgerung: Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar mit $M \cap N \subseteq \partial M \cup \partial N$ und $f : M \cup N \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

$$f \in \mathcal{R}(M \cup N) \Leftrightarrow f|_M \in \mathcal{R}(M) \wedge f|_N \in \mathcal{R}(N).$$

In diesem Fall gilt

$$\int_{M \cup N} f(x) \, dx = \int_M f(x) \, dx + \int_N f(x) \, dx. \quad (*)$$

Insbesondere: $|M \cup N| = |M| + |N|$.

Beweis: 1) 3.35 $\Rightarrow M \cup N$ ist Jordan-messbar.

2) f unstetig in $x \in M \cup N$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ unstetig in } x \in M \setminus N \text{ oder} \\ f \text{ unstetig in } x \in N \setminus M \text{ oder} \\ f \text{ unstetig in } x \in M \cap N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{x \in M \cup N : f \text{ ist unstetig in } x\}$$

$$\subseteq \{x \in M \setminus N : f \text{ unstetig in } x\} \cup \{x \in N \setminus M : f \text{ unstetig in } x\} \cup \underbrace{(M \cap N)}_{\text{Nullmenge}}$$

$$\supseteq \{x \in M \setminus N : f \text{ unstetig in } x\} \cup \{x \in N \setminus M : f \text{ unstetig in } x\}$$

3) (*) folgt aus 3.37 und

$$0 \leq \left| \int_{M \cap N} f(x) \, dx \right| \leq \int_{M \cap N} |f(x)| \, dx \leq \sup |f(x)| \cdot |M \cap N| = 0.$$

□

3.5 Integration über projizierbare Mengen

3.42 Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $f \in \mathcal{R}(M)$. Dann ist der Graph

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

eine Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^{d+1}$.

Beweis: Seien $I \supseteq M$, I abgeschlossenes Intervall, und $\varepsilon > 0$ fest.

Wähle Partition $P = \{I_1, \dots, I_n\}$ von I mit $\overline{S}(f_M, P) - \underline{S}(f_M, P) < \varepsilon$ (vgl. 3.14)

Es gilt

$$G(f) \subseteq G(f_M) \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k \times [m_k, M_k]$$

und

$$\sum_{k=1}^n \mu_{d+1}(I_k \times [m_k, M_k]) = \sum_{k=1}^n \mu_d(I_k) \cdot (M_k - m_k) = \overline{S}(f_M, P) - \underline{S}(f_M, P) < \varepsilon$$

□

3.43 Satz: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $u, o \in \mathcal{R}(M)$ mit $u(x) \leq o(x)$ für $x \in M$. Dann ist die Menge

$$N := \{(x, x_{d+1}) : x \in M \wedge u(x) \leq x_{d+1} \leq o(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$

Jordan-messbar, und es gilt

$$|N| = \int_M (o(x) - u(x)) \, dx.$$

Beweis: 1) Wähle $K_1 < K_2$ mit $K_1 \leq u(x) \leq o(x) \leq K_2$ für $x \in M$.

2) Zeige: ∂N ist eine Nullmenge.

$$\begin{aligned} \partial N \subseteq & \underbrace{\{(x, u(x)) : x \in M\}}_{=:B \text{ (Boden)}} + \underbrace{\{(x, o(x)) : x \in M\}}_{=:D \text{ (Deckel)}} \\ & + \underbrace{\{(x, x_{d+1}) : x \in \partial M \wedge K_1 \leq x_{d+1} \leq K_2\}}_{=:S} \end{aligned}$$

3.42 $\Rightarrow B, D$ sind Nullmengen

S ist Nullmenge, denn für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \partial M \subseteq \bigcup_K \tilde{I}_k \text{ mit } \sum_k \mu_d(\tilde{I}_k) &< \frac{\varepsilon}{K_2 - K_1} \quad (\partial M \text{ ist Nullmenge}) \\ \Rightarrow S \subseteq \bigcup_k \tilde{I}_k \times [K_1, K_2] \wedge \sum_k \mu_{d+1}(\tilde{I}_k \times [K_1, K_2]) &= (K_2 - K_1) \sum_k \mu_d(\tilde{I}_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow B \cup D \cup S$ ist Nullmenge, also auch ∂N .

3) Wähle $I \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossenes Intervall mit $I \supseteq M$
 $\Rightarrow N \subseteq I \times [K_1, K_2]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |N| &= \int_{I \times [K_1, K_2]} \chi_N(x, x_{d+1}) \, d(x, x_{d+1}) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_I \underbrace{\int_{K_1}^{K_2} \chi_N(x, x_{d+1}) \, dx_{d+1}}_{\text{existiert, siehe unten}} \, dx \\ &= \int_I \underbrace{\int_{u_M(x)}^{o_M(x)} 1 \, dx_{d+1}}_{=o_M(x)-u_M(x) \text{ existiert}} \, dx \\ &= \int_I (o_M(x) - u_M(x)) \, dx \\ &= \int_M (o_M(x) - u_M(x)) \, dx \end{aligned}$$

□

3.44 Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$.

1) M heißt **projizierbar** in x_k -Richtung ($1 \leq k \leq d$), falls es eine Jordan-messbare Menge $M_k \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ und zwei Funktionen $u, o \in \mathcal{R}(M_d)$ mit $u(x) \leq o(x)$ für $x \in M_k$ gibt, so dass

$$M = \{(x_1, \dots, x_d) : x' := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \in M_k \wedge u(x') \leq x_k \leq o(x')\} \quad (*)$$

gilt.

2) M heißt **Standardbereich**, falls M in jede Richtung $x_1, \dots, x_d$ projizierbar ist.

3.45 Satz (Fubini für Jordan-messbare Mengen): Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$ projizierbar in x_d -Richtung und $f \in \mathcal{R}(M)$, M_d und x' wie vorher. Existiert für jedes $x' \in M_d$ das Integral

$$\int_{u(x')}^{o(x')} f(x', x_d) dx_d,$$

dann gilt

$$\int_M f(x) dx = \int_{M_d} \int_{u(x')}^{o(x')} f(x', x_d) dx_d dx'.$$

Entsprechendes gilt, falls M projizierbar in x_k -Richtung ist.

Beweis: Beachte: $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$.

Wähle abgeschlossenes Intervall $I \supseteq M$, $I = I' \times [a, b]$, $I' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ abgeschlossenes Intervall

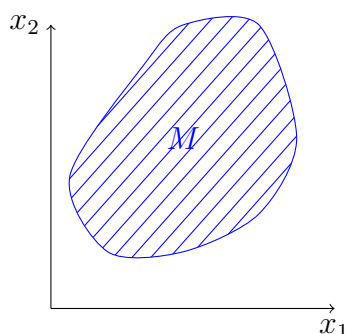
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M f(x) dx &= \int_{I' \times [a, b]} f_M(x) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{I'} \underbrace{\int_a^b f_M(x', x_{d+1}) dx_d}_{= \int_{u(x')}^{o(x')} f(x', x_d) dx_d \text{ existiert nach Voraussetzung}} dx' \end{aligned}$$

□

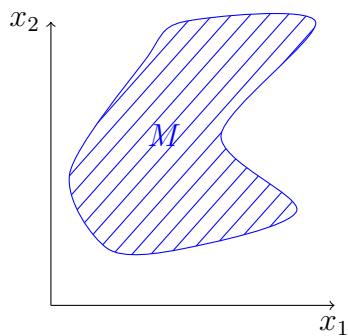
3.46 Beispiel: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 y$.

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) d(x, y) &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{15} (5 - 3) \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

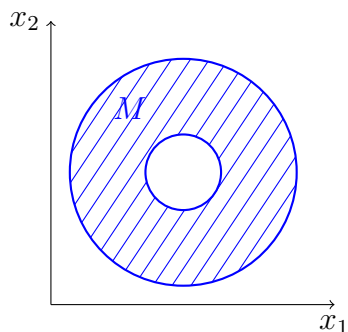
3.47 Beispiele: 1) M projizierbar in x_1 - und in x_2 -Richtung, also ist M ein Standardbereich.



- 2) M projizierbar in x_1 -Richtung, aber nicht in x_2 -Richtung



- 3) M weder in x_1 - noch in x_2 -Richtung projizierbar:

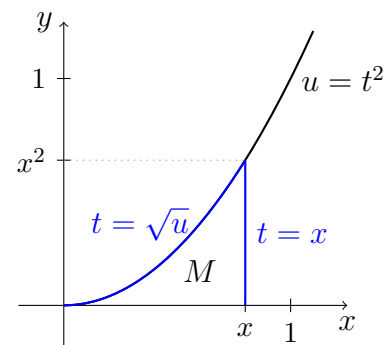


- 4) f sei stetig auf $[0, 1]$. Vereinfache $\int_{t=0}^x \int_{u=0}^{t^2} f(u) du dt$:

Integrationsgebiet $M = \{(t, u) : 0 \leq t \leq x \wedge 0 \leq u \leq t^2\}$
(Darstellung als in u -Richtung projizierbare Menge).

Aber M ist auch in t -Richtung projizierbar:

$$M = \{(t, u) : 0 \leq u \leq x^2 \wedge \sqrt{u} \leq t \leq x\}$$



$f : M \rightarrow \mathbb{R} : (t, u) \mapsto f(u)$ ist stetig, also R-interierbar und

$$\int_{\sqrt{u}}^x f(u) dt = (x - \sqrt{u})f(u) \text{ existiert.}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{3.45}{\Rightarrow} \int_{t=0}^x \int_{u=0}^{t^2} f(u) du dt &= \int_{u=0}^{x^2} \int_{t=\sqrt{u}}^x f(u) du dt \\ &= \int_0^{x^2} (x - \sqrt{u})f(u) du dt \end{aligned}$$

3.48 Satz von Cavalieri: Seien $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ Jordan-messbar, $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

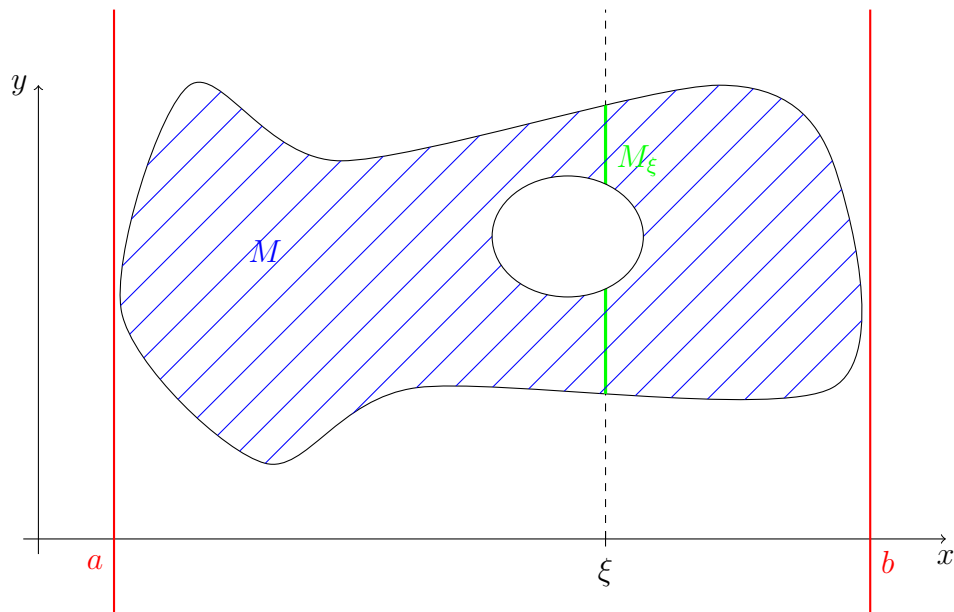
$$M \subseteq \{(\xi, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a \leq \xi \leq b\},$$

und

$$\forall \xi \in [a, b] : M_\xi := \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : (\xi, x') \in M\} \text{ ist Jordan-messbar in } \mathbb{R}^{d-1}.$$

Dann:

- 1) Die Abbildung $\xi \mapsto |M_\xi| := (d-1)$ -Jordan Inhalt von M_ξ ist R-integrierbar über $[a, b]$ und
- 2) für den Jordan-Inhalt von M im $\mathbb{R}^d$ gilt $|M| = \int_a^b |M_\xi| d\xi$.



Beweis: Wähle abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, so dass $M \subseteq [a, b] \times I$

$$\Rightarrow |M| = \int_M 1 dx = \int_{[a,b] \times I} \chi_M(x) dx.$$

Voraussetzung

$$\Rightarrow \forall \xi \in [a, b] : |M_\xi| = \int_{M_\xi} 1 dx' \stackrel{M_\xi \subseteq I}{=} \int_I \chi_{M_\xi}(x') dx' = \int_I \chi_M(\xi, x') dx' \text{ existiert}$$

Fubini 3.24 $\Rightarrow$

$$1) \quad \underbrace{\left(\xi \mapsto \int_I \chi_M(\xi, x') dx' \right)}_{=|M_\xi|} \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ und}$$

$$2) \quad |M| = \int_{[a,b] \times I} \chi_M(x_1, x') d(x_1, x') = \int_{[a,b]} \int_I \chi_M(x_1, x') dx' dx_1 = \int_a^b |M_{x_1}| dx_1$$

□

3.49 Beispiel: Seien $r, h > 0$ und $M = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq h \wedge x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h} z\}$:

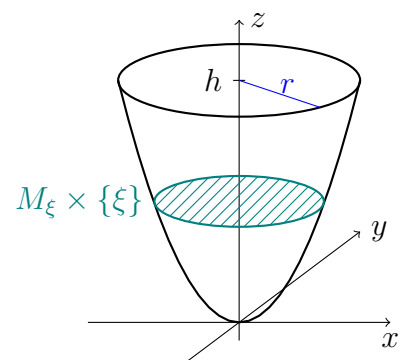
„Schnitt“ mit $z = \xi$: $M_\xi = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h} \xi\}$

$$\Rightarrow |M_\xi| = \pi \frac{r^2}{h} \xi \text{ (Flächeninhalt Kreis)}$$

Wähle $a = 0$ und $b = h \Rightarrow M \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b\}$

$\Rightarrow$ Volumen des Rotationsellipsoids:

$$|M| = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h} \xi d\xi = \frac{\pi}{2} r^2 h.$$



3.6 Der Transformationssatz

3.50 Transformationssatz: Seien $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $g \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^d)$ mit

$$\det(g'(x)) > 0 \text{ auf } O \text{ oder } \det(g'(x)) < 0 \text{ auf } O,$$

g injektiv, $M \subseteq O$ Jordan-messbar mit $\overline{M} \subseteq O$. Dann ist auch $g(M)$ Jordan-messbar, und für $f \in C(g(\overline{M}) \rightarrow \mathbb{R})$ gilt

$$\int_{g(M)} f(y) \, dy = \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| \, dx.$$

3.51 Bemerkung: Im Fall $d = 1$, $M = [a, b]$ gilt gemäß Integration durch Substitution

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy = \int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx.$$

Woher kommt der Betrag $|\det(g'(x))|$? Im Fall $g'(y) < 0$ für $y \in [a, b]$ gilt $g(a) < g(b)$, da g streng monoton fallend, und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(g(x)) |g'(x)| \, dx &= - \int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{Subst}}{=} - \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy \\ &= \int_{g(b)}^{g(a)} f(y) \, dy \\ &= \int_{[g(b), g(a)] = g([a,b])} f(y) \, dy \end{aligned}$$

3.52 Beispiel: $\int_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} \, d(x, y)$

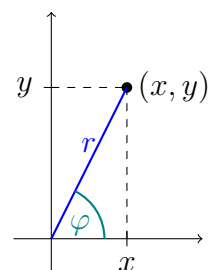
Ebene Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$

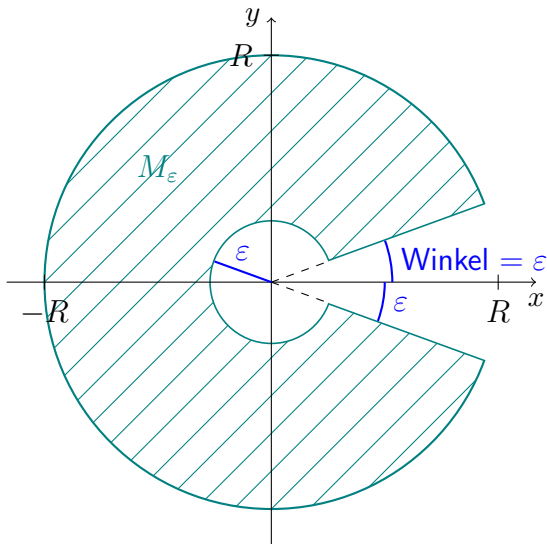
$$g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow g \text{ injektiv, } g' \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ ist stetig,}$$

$$\det(g'(r, \varphi)) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$$

Transformationssatz für $B_R(0)$ nicht anwendbar. Definiere $M_\varepsilon \subseteq \text{Bild}(g)$ durch





$$\Rightarrow M_\varepsilon = g\left(\underbrace{[\varepsilon, R] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]}_{\text{Urbild ist Rechteck}}\right)$$

Transformationssatz:

$$\begin{aligned} \int_{M_\varepsilon} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_{[\varepsilon, R] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} e^{-(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)} r dr d\varphi \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{r=\varepsilon}^R \underbrace{\int_{\varphi=\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} e^{-r^2} r d\varphi}_{=(2\pi - 2\varepsilon)e^{-r^2} r} dr \\ &= (2\pi - 2\varepsilon) \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=\varepsilon}^R \\ &= (2\pi - 2\varepsilon) \left(\frac{1}{2} e^{-\varepsilon^2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 2\pi \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) = \pi (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R(0) \setminus M_\varepsilon} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \right| &\stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\leq} \max\{e^{-(x^2+y^2)}\} \cdot |B_R(0) \setminus M_\varepsilon| \\ &\leq 1(\pi \varepsilon^2 + \varepsilon R^2) \\ &\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\int_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{M_\varepsilon} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \pi (1 - e^{-R^2})$$

3.53 Satz (Monotonie bezüglich Menge): Seien $M \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar und $f \in \mathcal{R}(N)$, $f(x) \geq 0$ auf N . Dann

$$\int_M f(x) dx \leq \int_N f(x) dx.$$

Beweis: 3.36 $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(M)$

3.35 $\Rightarrow N \setminus M$ ist Jordan-messbar

$$3.37 \Rightarrow \int_{N=M \cup N \setminus M} f(x) dx = \int_M f(x) dx + \underbrace{\int_{N \setminus M} f(x) dx}_{\geq 0 \text{ siehe 3.33}} + \underbrace{\int_{M \cap N \setminus N = \emptyset} f(x) dx}_{=0} \geq \int_M f(x) dx$$

□

3.54 Folgerung: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Beweis: Es gilt $B_R(0) \subseteq [-R, R] \times [-R, R] \subseteq B_{\sqrt{2}R}(0)$

$$\begin{aligned} e^{-(x^2+y^2)} > 0 &\Rightarrow \underbrace{\int_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)}_{=\pi(1-e^{-R^2}) \rightarrow \pi \text{ für } R \rightarrow \infty} \leq \underbrace{\int_{[-R, R] \times [-R, R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)}_{=\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy \rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 \text{ für } R \rightarrow \infty} \\ &\leq \underbrace{\int_{B_{\sqrt{2}R}(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)}_{=\pi(1-e^{-2R^2}) \rightarrow \pi \text{ für } R \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

□

3.55 Satz: Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und Jordan-messbar, $g \in C^1(M \rightarrow N)$ bijektiv und $\det(g'(x)) > 0$ auf M oder $\det(g'(x)) < 0$ auf M , Weiter seien $g, \det(g')$ stetig fortsetzbar auf $\overline{M}$. Dann gilt für $f \in C(\overline{N} \rightarrow \mathbb{R})$

$$\int_{\overline{N}} f(y) dy = \int_{\overline{M}} f(g(x)) |\det(g'(x))| dx.$$

Beweis: 1) $\int_{\overline{N}=N \cup \partial N} f(y) dy \stackrel{3.37}{=} \int_N f(y) dy + \underbrace{\int_{\partial N} f(y) dy}_{=0} - \underbrace{\int_{N \cap \partial N} f(y) dy}_{=0} = \int_N f(y) dy$

Es genügt also, zu zeigen, dass

$$\int_N f(y) dy = \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| dx$$

2) $\overline{N}, \overline{M}$ sind kompakt, und $f, g, \det(g'(x))$ sind stetig

$$\Rightarrow \exists K > 0 : |f(y)| \leq K \text{ für } y \in \overline{N} \wedge |f(g(x)) \det(g'(x))| \leq K \text{ für } x \in \overline{M}$$

3) Spezialfall $f \geq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ fest.

a) Wähle abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $M \subseteq I$

$$3.30 \Rightarrow \exists \text{ Partition } P = \{I_1, \dots, I_n\} \text{ von } I : \sum_{\{k: I_k \subseteq M\}} \mu_d(I_k) \geq |M| - \frac{\varepsilon}{K}$$

Setze $\tilde{M} := \bigcup_{\{k: I_k \subseteq M\}} I_k$. Dann

(i) $\tilde{M} \subseteq M \wedge \overline{\tilde{M}} = \tilde{M} \subseteq M$ und

(ii) $|\tilde{M}| = \sum_{\{k: I_k \subseteq M\}} \mu_d(I_k) \geq |M| - \frac{\varepsilon}{K}$ und

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \left| \int_{M \setminus \tilde{M}} f(g(x)) |\det(g'(x))| dx \right| &\stackrel{\substack{\text{Mittelwert-} \\ \text{satz 3.34}}}{\leq} K |M \setminus \tilde{M}| \stackrel{\substack{\tilde{M} \subseteq M \\ 3.38}}{=} K (|M| - |\tilde{M}|) \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} K \cdot \\ &\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| dx & \stackrel{3.37}{=} \int_{M \setminus \tilde{M}} \dots dx + \int_{\tilde{M}} \dots dx \\
 & \stackrel{(iii)}{\leq} \int_{\tilde{M}} f(g(x)) |\det(g'(x))| dx + \varepsilon \\
 & \stackrel{\tilde{M} \subseteq M}{=} \int_{g(\tilde{M})} f(y) dy + \varepsilon \\
 & \stackrel{\text{Transformationssatz in } O=M}{=} \int_N f(y) dy + \varepsilon \\
 & \stackrel{G(\tilde{M}) \subseteq N, f \geq 0}{\stackrel{3.53}{\leq}} \int_N f(y) dy + \varepsilon
 \end{aligned}$$

b) Wähle abgeschlossenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $N \subseteq J$

$$3.30 \Rightarrow \exists \text{ Partition } P = \{J_1, \dots, J_M\} \text{ von } J : \sum_{\{k: J_k \subseteq N\}} \mu_d(J_k) \geq |N| - \frac{\varepsilon}{K}$$

Setze $\tilde{N} := \bigcup_{\{k: J_k \subseteq N\}} J_k$. Dann

- (i) $\tilde{N} = \overline{\tilde{N}} \subseteq N$ und
- (ii) $|\tilde{N}| \geq |N| - \frac{\varepsilon}{K}$ und
- (iii) $\left| \int_{N \setminus \tilde{N}} f(y) dy \right| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_N f(y) dy &= \int_{\tilde{N}} \dots dy + \int_{N \setminus \tilde{N}} \dots dy \\
 &\leq \int_{\tilde{N}} f(y) dy + \varepsilon \\
 &\stackrel{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{g^{-1}(\tilde{N})} f(g(x)) |\det(g'(x))| dx + \varepsilon \\
 &\stackrel{g^{-1}(\tilde{N}) \subseteq M}{\stackrel{3.53}{\leq}} \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| dx + \varepsilon
 \end{aligned}$$

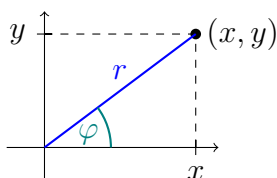
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_N f(y) dy &\leq \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| dx + \varepsilon \leq \int_N f(y) dy + 2\varepsilon \\
 \varepsilon > 0 \text{ beliebig} \Rightarrow \int_N f(y) dy &= \int_M f(g(x)) |\det(g'(x))| dx
 \end{aligned}$$

4) Für beliebiges $f \in C(\overline{N} \rightarrow \mathbb{R})$: Zerlege

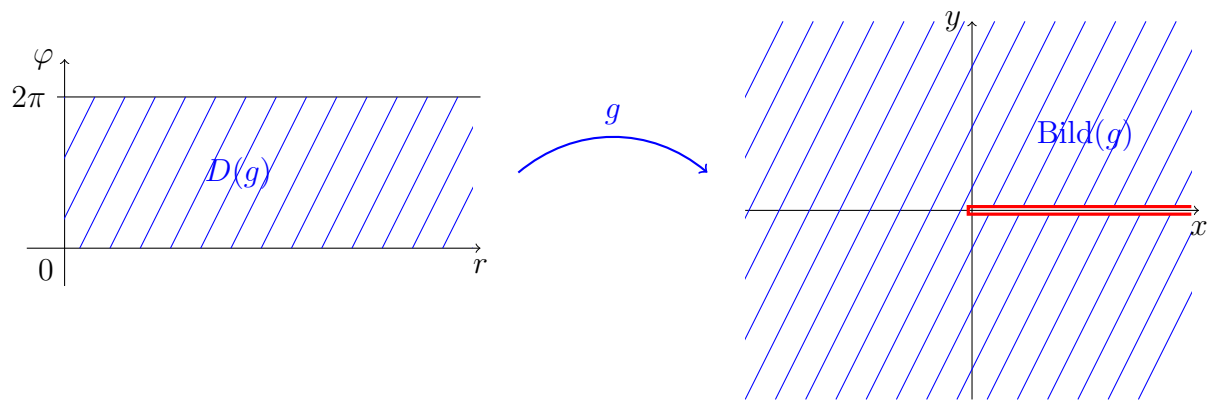
$$f = \underbrace{f - \min_{y \in \overline{N}} f(y)}_{\geq 0} + \underbrace{\min_{y \in \overline{N}} f(y)}_{\text{konstant}}$$

und verwende die Linearität des Integrals. □

3.56 Beispiele: 1) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$:



$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \\
 y &= r \sin \varphi \\
 g : \underbrace{]0, \infty[\times]0, 2\pi[}_{=D(g)} &\rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}}_{=\text{Bild}(g)}
 \end{aligned}$$



Integral über $B_R(0)$ berechnen:

Setze $M :=]0, R[\times]0, 2\pi[$, $N := B_R(0) \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{M} = [0, R] \times [0, 2\pi], \overline{N} = \overline{B_R(0)} \\ g, \det(g') = r \text{ sind stetig fortsetzbar auf } \overline{M} \end{cases}$$

$$\stackrel{3.55}{\Rightarrow} \int_{\overline{B_R(0)}} f(x, y) d(x, y) = \int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \underbrace{f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}_{=g(r, \varphi)} \cdot \underbrace{r}_{\det(g'(r, \varphi))} d(r, \varphi)$$

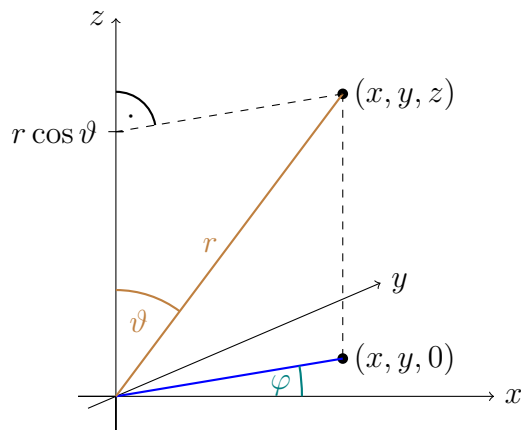
für $f \in C(\overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R})$.

- 2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:
- $$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

$$g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{pmatrix} \Rightarrow \det(g') = r$$

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0 \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

- 3) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:



$$g \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0 \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

$$\det(g'(r, \varphi, \vartheta)) = \det \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix} = -r^2 \sin \vartheta$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left| B_R(0) \right| &= \int_{B_R(0)} 1 \, d(x, y, z) \\
&\stackrel{\substack{3.55 \\ \text{und Fubini}}}{=} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} 1 \cdot r^1 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\
&= \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \underbrace{[-\cos \vartheta]_{\vartheta=0}^{\pi}}_{=2} \, d\varphi \, dr \\
&= 2 \cdot 2\pi \int_{r=0}^R r^2 \, dr \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3.
\end{aligned}$$