

4 Integralsätze

4.1 Kurvenintegrale

4.1 Definition: Sei $\gamma \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$.

- 1) $K := \text{Bild}(\gamma)$ heißt **Kurve** im \mathbb{R}^d , $(\gamma, [a, b])$ heißt **Parameterdarstellung** von K . Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt K **geschlossen**.
- 2) Ist $\gamma|_{[a, b]}$ injektiv, so heißt K **Jordan-Kurve**.

4.2 Bemerkung: Parameterdarstellung induziert einen Durchlaufsin.

4.3 Beispiel: Seien $r, c > 0$ gegeben und

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ ct \end{pmatrix}.$$

4.4 Definition: Seien $(\gamma, [a, b])$, $(g, [c, d])$ Parameterdarstellungen der Kurve K . Existiert $\varphi \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ mit

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'(t) > 0 \text{ auf } [a, b] \text{ und} \\ \varphi(a) = c, \varphi(b) = d \text{ und} \\ \gamma(t) = g \circ \varphi(t) \text{ für } t \in [a, b], \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d] \text{ bijektiv}$$

so heißen die Parameterdarstellungen **äquivalent**.

4.5 Beispiel: $(g, [0, 1])$ mit $g(t) = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{8\pi t}{1+t}\right) \\ r \sin\left(\frac{8\pi t}{1+t}\right) \\ c\frac{8\pi t}{1+t} \end{pmatrix} = \gamma\left(\frac{8\pi t}{1+t}\right)$ ist äquivalent zu $(\gamma, [0, 4\pi])$ aus 4.3.

$(h, [0, 2\sqrt{\pi}])$ mit $h(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t^2) \\ r \sin(t^2) \\ ct^2 \end{pmatrix} = \gamma(t^2)$ liefert die selbe Kurve K , ist aber keine äquivalente Parameterdarstellung, denn $\varphi(t) = t^2$, aber $\varphi'(0) = 0$ ist nicht erlaubt.

4.6 Definition: Sei $(\gamma, [a, b])$ Parameterdarstellung von K . Existiert $\gamma'(t_0)$ und gilt $\gamma'(t_0) \neq 0$, so heißt

$$T_\gamma(t_0) := \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \cdot \gamma'(t_0)$$

Tangenteneinheitsvektor im Punkt $\gamma(t_0)$.

4.7 Satz: Seien $(\gamma, [a, b]), (g, [a, b])$ äquivalente Parameterdarstellungen der Kurve K . Dann

$$T_\gamma(t_0) = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \cdot \gamma'(t_0) \stackrel{\gamma=g \circ \varphi}{=} \frac{g'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)}{\|g'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)\|} \stackrel{\varphi'(t_0) > 0}{=} \frac{g'(\varphi(t_0))}{\|g'(\varphi(t_0))\|} = T_g(\varphi(t_0)).$$

4.8 Definition: Sei K Kurve im \mathbb{R}^d .

- 1) Existiert eine Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ mit $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ und $\gamma'(t) \neq 0$ auf $[a, b]$, so heißt K **glatt**.
Insbesondere: K **glatt** $\Rightarrow T_\gamma$ stetig auf $[a, b]$.
- 2) K heißt **stückweise glatt**, falls es eine Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gibt, so dass

$$\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^d) \text{ und } (\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]})'(t) \neq 0 \text{ für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

für $j = 1, \dots, n$ gilt.

4.9 Bemerkung: Glatte Kurven haben keine Ecken, stückweise glatte Kurven können Ecken besitzen.

4.10 Definition: Sei K Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$.

- 1) Falls

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall a = t_0 < t_1, \dots < t_n = b : L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) := \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq M,$$

so heißt K **rektifizierbar**.

2) Ist K rektifizierbar, so heißt

$$L(K) := \sup_{\{t_0, \dots, t_n\}} L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K)$$

die **Bogenlänge** von K .

4.11 Satz: Sei K Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$, $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$. Dann ist K rektifizierbar mit

$$L(K) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Beweis: 1) Für $a \leq t_{j-1} < t_j \leq b$ gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| &= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt \\ \Rightarrow L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) &\leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt =: M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K \text{ ist rektifizierbar und } L(K) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

2) Sei $\varepsilon > 0$. γ' ist stetig auf kompakter Menge, also gleichmäßig stetig:

$$\exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] : |s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \varepsilon.$$

Sei $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ mit $\max |t_j - t_{j-1}| < \delta$. Dann

$$\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t_j) + \gamma'(t) - \gamma'(t_j)\| \leq \|\gamma'(t_j)\| + \varepsilon \quad \text{für } t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt &\leq \|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\gamma'(t_j) - \gamma'(t) + \gamma'(t)) dt \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|\gamma'(t_j) - \gamma'(t)\|}_{< \varepsilon} dt + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \|\gamma'(t_j) - \gamma'(t_{j-1})\| + 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{j=1}^n \left(\|\gamma'(t_j) - \gamma'(t_{j-1})\| + 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) \right) \leq L(K) + 2\varepsilon(b - a)$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq L(K)$.

□

4.12 Bemerkung: Ist K rektifizierbar, und sind $(\gamma, [a, b])$, $(g, [a, b])$ äquivalente Parameterdarstellungen, so gilt

$$L^{(\gamma)}(K) := \sup_n \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sup_m \sum_{j=1}^m \|g(t_j) - g(t_{j-1})\| = L^{(g)}(K).$$

D.h. äquivalente Parameterdarstellungen ergeben die selbe Länge.

4.13 Hilfssatz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$. Ist $c \in]a, b[$, so sind $K' = \gamma([a, c])$ und $K'' := \gamma([c, b])$ rektifizierbare Jordan-Kurven, und es gilt

$$L(K') + L(K'') = L(K).$$

Beweis: 1) Seien $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c$, $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$

$$\Rightarrow L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K') + L_{\{s_0, \dots, s_m\}}(K'') = L_{\{t_0, \dots, t_n=s_0, s_1, \dots, s_m\}}(K) \leq L(K).$$

$$\Rightarrow K', K'' \text{ sind rektifizierbar, } L(K') + L(K'') \leq L(K).$$

2) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit $L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) > L(K) - \varepsilon$.

Ergänze die Unterteilung eventuell um c , so dass $a = t'_0 < \dots < t'_k = c < t'_{k+1} < \dots < t'_m = b$.

$$\Rightarrow L_{\{t'_0, \dots, t'_k\}}(K') + L_{\{t'_k, \dots, t'_m\}}(K'') = L_{\{t'_0, \dots, t'_m\}}(K) > L(K) - \varepsilon.$$

$$\Rightarrow L(K') + L(K'') > L(K) - \varepsilon \stackrel{\varepsilon \downarrow 0}{\Rightarrow} L(K') + L(K'') \geq L(K).$$

□

4.14 Beispiel: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq b$: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$

$$\Rightarrow L(K) = \int_0^b \sqrt{1 + 4t^2} dt \stackrel{\text{Analysis 1}}{=} \frac{b}{2} \sqrt{1 + 4b^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2b)$$

4.15 Satz: Seien K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ und

$$K_t := \gamma([a, t]), \quad L(t) := L(K_t) \text{ für } t \in [a, b].$$

Dann gelten:

- 1) L ist streng monoton wachsend,
- 2) L ist stetig,
- 3) $\operatorname{Bild}(L) = [0, L(K)]$ und $L : [a, b] \rightarrow [0, L(K)]$ ist bijektiv,
- 4) Ist zusätzlich $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$, so ist L differenzierbar mit $L'(t) = \|\gamma'(t)\|$ für $t \in [a, b]$. Insbesondere: $L \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$.

Beweis: 1) Für $a \leq t < t' < b$ gilt mit $K' = \gamma([t, t'])$:

$$4.13 \Rightarrow L(K_t) + L(K') = L(K_{t'})$$

$$\Rightarrow L(t') - L(t) = L(K') \geq \underbrace{\|\gamma(t') - \gamma(t)\|}_{\substack{> \\ \text{da } K \text{ Jordan-Kurve: } \gamma(t') \neq \gamma(t)}} > 0.$$

2) a) Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: Es gibt $t, t' \in]a, b[$, so dass

$$0 \leq L(t) < \varepsilon \text{ und } 0 \leq L(b) - L(t') < \varepsilon.$$

Wähle $a = t_0 < \dots < t_n = b$ mit

$$L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) \geq L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$$

γ ist stetig auf kompakter Menge $[a, b]$, also gleichmäßig stetig

$$\exists \delta > 0 \forall t, t' \in [a, b] : |t - t'| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t')\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ergänze $\{t_0, \dots, t_n\}$ um Zwischenstellen zu $\{t'_0, \dots, t'_m\}$, so dass $|t'_j - t'_{j-1}| < \delta$ für $j = 1, \dots, m$.

$$\Rightarrow L_{\{t'_0, \dots, t'_m\}}(K) \geq L_{\{t_0, \dots, t_n\}}(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Setze $K_j := \gamma([t'_{j-1}, t'_j])$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq L(K_1) - \|\gamma(t'_1) - \gamma(t'_0)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m (L(K_j) - \|\gamma(t'_j) - \gamma(t'_{j-1})\|) \\ &\stackrel{4.13}{=} L(K) - L_{\{t'_0, \dots, t'_m\}}(K) \\ &\stackrel{(*)}{<} L(K) - \left(L(K) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow L(K_1) &< \frac{\varepsilon}{2} + \|\gamma(t'_1) - \gamma(t'_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow 0 \leq L(t'_1) &= L(K_1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Genauso folgt $0 \leq L(b) - L(t_{m-1}) \stackrel{4.13}{=} L(K_m) < \varepsilon$.

b) Sei $t \in]a, b[$ mit $0 \leq L(t) < \varepsilon$
 \Rightarrow Für $t'' \in [a, t]$ gilt

$$0 \leq \underbrace{L(t'')}_{1)} - \underbrace{L(a)}_{=0} \leq \underbrace{L(t)}_{1)} < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow L$ ist in $t = a$ rechtsseitig stetig.

Anwendung von a) auf $\gamma([t_0, b]) \stackrel{\text{genauso}}{\Rightarrow} L$ ist rechtsseitig stetig in $t = t_0$ für $t_0 \in [a, b]$.

Genauso: a) $\Rightarrow L$ ist linksseitig stetig in t_0 für $t_0 \in]a, b]$.

3) L stetig $\wedge L(a) = 0 \wedge L(b) = L(K) \stackrel{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} 3)$.

$$4) \quad 4.11 \Rightarrow L(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau \stackrel[\text{Diff-Integralrechnung}]{\text{Hauptsatz}}{=} L'(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

□

4.16 Definition: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$. Dann heißt

$$(g, [0, L(K)]) \text{ mit } g(s) = \gamma(L^{-1}(s))$$

Bogenlängendarstellung von K . (Durch Nachrechnen: Äquivalente Parameterdarstellungen führen zur selben Bogenlängendarstellung.)

4.17 Folgerung: Falls $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$: $g \in C^1([0, L(K)] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ und

$$\begin{aligned} \|g'(s)\| &= \left\| \frac{d}{ds} \gamma(L^{-1}(s)) \right\| \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \|\gamma'(L^{-1}(s)) \cdot (L^{-1})'(s)\| \\ &\stackrel{\text{Analysis 1}}{=} \left\| \gamma'(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{L'(L^{-1}(s))} \right\| = \left\| \gamma'(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(L^{-1}(s))\|} \right\| = 1. \end{aligned}$$

4.18 Beispiel: Sei $r > 0$ fest und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos 2\pi t \\ r \sin 2\pi t \end{pmatrix}$, $1 \leq t \leq 2$:

$$\|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} -2\pi r \sin(2\pi t) \\ 2\pi r \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \right\| = 2\pi r$$

$$\Rightarrow L(t) = \int_1^t 2\pi r \, d\tau = 2\pi r(t - 1) = s$$

$$\Rightarrow t = L^{-1}(s) = \frac{s}{2\pi r} + 1$$

\Rightarrow Bogenlängendarstellung:

$$g(s) = \gamma\left(\frac{s}{2\pi r} + 1\right) = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right) \\ r \sin\left(\frac{s}{r} + 2\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi r.$$

4.19 Definition: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$, $K \subseteq D$ rektifizierbare Jordan-Kurve mit Bogenlängendarstellung $(g, [0, L(K)])$. Dann heißt

$$\int_K f \, ds := \int_0^{L(K)} f(g(s)) \, ds$$

Kurvenintegral von f über K .

4.20 Satz: Voraussetzungen wie 4.19 und zusätzlich Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ von K mit $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\int_K f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Beweis: 4.11: $L(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$

$$\Rightarrow \int_0^{L(K)} f(g(s)) \, ds \stackrel{s=L(t)}{\underset{ds=\|\gamma'(t)\| \, dt}{=}} \int_a^b f(\underbrace{g(L(t))}_{\stackrel{4.16}{=} \gamma(L^{-1}(L(t)))=\gamma(t)}) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

□

4.21 Beispiele: 1) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1 : t \mapsto t, K = [a, b] \Rightarrow \int_K f \, ds = \int_a^b f(t) \cdot 1 \, dt$
Also: Kurvenintegral beinhaltet Integral über Intervall.

2) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$ und $f(x, y) = x^3 + y^3$

$$\Rightarrow \int_K f \, ds = \int_0^1 (1 + a^3)t^3 \sqrt{1 + a^2} \, dt = \sqrt{1 + a^2} (1 + a^3) \frac{1}{4}$$

4.22 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen

1) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt

$$\text{grad } f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_d f \end{pmatrix} = \nabla f \quad (\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_d \end{pmatrix} = \text{Nabla-Operator})$$

Gradient von f .

2) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, dann heißt f auch **Vektorfeld**. Gibt es eine Funktion $F \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$, so dass $f = \nabla F$ in D , so heißt f **Gradientenfeld**, F heißt **Potential** von f .

3) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar, so heißt

$$\text{div } f := \sum_{j=1}^d \partial_j f_j = \nabla \cdot f$$

↑
Skalarprodukt im \mathbb{R}^d

Divergenz von f , auch Quellenstärke.

4) Nur für $d = 3$: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so heißt

$$\text{rot } f := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} =: \nabla \times f = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

↑
Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3

Rotation von f , auch **Wirbelstärke**.

4.23 Folgerung: 1) $\int_K (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) ds = \lambda \int_K f ds + \mu \int_K g ds$

2) $\left| \int_K f ds \right| \leq \max |f| \cdot L(K)$

3) Falls $K = K_1 \cup K_2$ Jordan-Kurve, wobei K_1, K_2 rektifizierbare Jordan-Kurven und Endpunkt von $K_1 =$ Anfangspunkt von K_2 :

$$\int_K f ds = \int_{K_1} f ds + \int_{K_2} f ds.$$

4.24 Rechenregeln: 1) grad, div, rot sind linear.

2) $\text{rot}(\text{grad} f) = 0, \text{div}(\text{rot} f) = 0.$

4.25 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R}^d)$, $K \subseteq D$ rektifizierbare Jordan-Kurve mit Bogenlängendarstellung $g \in C^1([0, L(K)] \rightarrow \mathbb{R}^d)$. Dann heißt

$$\int_K f \cdot T_g ds := \int_0^{L(K)} f(g(s)) \cdot \underbrace{g'(s)}_{\substack{= \text{Tangenteneinheitsvektor} \\ 4.17: \|g'(s)\| = 1}} ds$$

Wegintegral von f über K .

4.26 Folgerung: Voraussetzungen wie vorher. Ist zusätzlich $(\gamma, [a, b])$ eine Parameterdarstellung von K mit $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\int_K f \cdot T_g ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Beweis: Selber, vgl. 4.20. □

4.27 Bemerkungen: 1) Wegintegral in der Physik: Arbeitsintegral

2) Andere Schreibweise

$$\int_K f \cdot T_g ds = \sum_{j=1}^d \int_K f_j dx_j, \quad \int_K f_j dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt.$$

4.28 Erweiterung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R}^d)$ und $K \subseteq D$ eine stückweise glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für $j = 1, \dots, n$ glatte Kurven sind. Dann

$$\int_K f \cdot T_g ds := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma([t_{j-1}, t_j])} f \cdot T_g ds = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \left(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \right)'(t) dt.$$

4.29 Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R}^d)$ ein Gradientenfeld mit Potential $F \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$. Für jede stückweise glatte Jordan-Kurve $K \subseteq D$ gilt

$$\int_K f \cdot T_\gamma \, ds = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt}).$$

Insbesondere ist das Wegintegral **wegunabhängig**.

Beweis: Seien $(\gamma, [a, b])$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ wie in 4.28. Dann

$$\begin{aligned} \int_K f \cdot T_g \, ds &\stackrel{4.28}{=} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{f(\gamma(t)) \cdot (\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]})'(t)}_{\substack{\text{Kettenregel} \\ \text{rückwärts}} = (\nabla F)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)} \, dt \\ &\stackrel{\substack{\text{Hauptsatz Diff-} \\ \text{Int-Rechnung}}}{=} (F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1}))) \\ &\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} F(\underbrace{\gamma(t_n)}_{=b}) - F(\underbrace{\gamma(t_0)}_{=a}). \end{aligned}$$

□

4.30 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

- 1) D heißt **(weg-)zusammenhängend**, falls zu je zwei Elementen $x, y \in D$ eine Kurve $K \subseteq D$ mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ und $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ existiert.
- 2) D heißt **Gebiet**, falls D offen und zusammenhängend ist. In diesem Fall kann oBdA K als glatt angenommen werden.

4.31 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R}^d)$. Ist das Wegintegral von f über K für stückweise glatte Kurven $K \subseteq D$ wegunabhängig, so besitzt f ein Potential $F \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$, d.h. $\nabla F = f$ in D .

Beweis: Wähle $x_0 \in D$ fest. Zu jedem $x \in D$ wähle $K_x \subseteq D$ stückweise glatt mit x_0 als Anfangs- und x als Endpunkt. Setze

$$F(x) := \int_{K_x} f \cdot T \, ds.$$

Seien $x \in D$, K_x und $j \in \{1, \dots, d\}$ fest. Zeige: $\partial_j F(x) = f_j(x)$.

D offen $\Rightarrow \exists \delta_0 > 0 : B_{\delta_0}(x) \subseteq D$.

Setze $\gamma_j(t) = x + t \cdot e_j$ für $|t| \leq \delta_0$.

Wähle $|h| < \delta_0 \Rightarrow \gamma_j([0, h]) \subseteq D$, glatte Kurve

$\Rightarrow K_x \cup \gamma_j([0, h])$ ist Kurve von x_0 und $x + h \cdot e_j$, die in D verläuft

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x + h \cdot e_j) &= \underbrace{\int_{K_x} f \cdot T \, ds}_{=F(x)} + \int_{\gamma_j([0, h])} f \cdot T \, ds \\ \Rightarrow F(x + h \cdot e_j) - F(x) &= \int_{\gamma_j([0, h])} f \cdot T \, ds \\ &\stackrel{4.26}{=} \int_0^h \underbrace{f(x + t \cdot e_j) \cdot e_j}_{=f_j(x+t \cdot e_j)} \, dt \\ &\stackrel{\substack{\text{Mittelwertsatz} \\ \text{Integralrechnung}}}{=} (h - 0) \cdot f_j(x + \tau_h \cdot e_j), \quad \tau_h \in]0, h[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{h}(F(x + h \cdot e_j) - F(x)) &= f_j(x + \tau_h \cdot e_j(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_j(x) \\ \Rightarrow \partial_j F(x) &= f_j \\ \Rightarrow \nabla F(x) &= f(x). \end{aligned}$$

□

4.2 Flächenintegrale im \mathbb{R}^3

4.32 Definition: Sei $O \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^3)$, $M \subseteq O$, M abgeschlossen und Jordanmessbar, $f|_M$ injektiv und

$$\text{Rang}(\partial_1 f(x) \ \partial_2 f(x)) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{für } x \in M.$$

Dann heißt $F = f(M)$ **Fläche** im \mathbb{R}^3 , (f, M) heißt **Parameterdarstellung** von F .

4.33 Satz: Sei F Fläche im \mathbb{R}^3 mit Parameterdarstellung (f, M) . Ist $K \subseteq M$ eine glatte Jordan-Kurve, so ist $f(K)$ eine glatte Jordan-Kurve im \mathbb{R}^3 .

Beweis: K besitzt Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$, so dass $\gamma|_{[a, b]}$ injektiv, $\gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$ ist.

$\Rightarrow f(K)$ besitzt die Parameterdarstellung $(f \circ \gamma, [a, b])$ und

1) $f \circ \gamma|_{[a, b]}$ ist injektiv, da $f, \gamma|_{[a, b]}$ injektiv

2) $f \circ \gamma \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \text{3) } (f \circ \gamma)'(t) &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\gamma(t)) & \partial_2 f_1(\gamma(t)) \\ \partial_1 f_2(\gamma(t)) & \partial_2 f_2(\gamma(t)) \\ \partial_1 f_3(\gamma(t)) & \partial_2 f_3(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \gamma'_1(t) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\gamma(t)) \\ \partial_1 f_2(\gamma(t)) \\ \partial_1 f_3(\gamma(t)) \end{pmatrix} + \gamma'_2(t) \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 f_1(\gamma(t)) \\ \partial_2 f_2(\gamma(t)) \\ \partial_2 f_3(\gamma(t)) \end{pmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

da $\{\partial_1 f, \partial_2 f\}$ linear unabhängig und $\begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \neq 0$.

□

4.34 Folgerung: Der Tangentenvektor

$$T_{f \circ \gamma}(t) = \frac{1}{\|(f \circ \gamma)'(t)\|} \cdot (f \circ \gamma)'(t)$$

liegt in $\text{LH}\{\partial_1 f(\gamma(t)), \partial_2 f(\gamma(t))\}$ (LH = lineare Hülle).

4.35 Definition: Sei (f, M) Parameterdarstellung der Fläche F und $x \in M$.

1) $\text{LH}\{\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)\}$ heißt **Tangentenraum** an F im Punkt $f(x)$.

2) Die Ebene

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = f(x) + t \cdot \partial_1 f(x) + s \cdot \partial_2 f(x) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt **Tangentialebene** an F im Punkt $f(x)$.

3) $n(x) := \frac{1}{\|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\|} \cdot \partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)$ heißt **Normaleneinheitsvektor** an F im Punkt $f(x)$.

4.36 Bemerkung: $\|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ aufgespannt wird. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\| \neq 0 &\Leftrightarrow \{\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)\} \text{ ist linear unabhängig} \\ &\Leftrightarrow \text{Rang}(\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)) = 2. \end{aligned}$$

4.37 Definition: Sei (f, M) Parameterdarstellung der Fläche F . Dann heißt $\partial F := f(\partial M)$ **Rand** von F .

4.38 Folgerung: Sei (f, M) Parameterdarstellung der Fläche F . Ist ∂M eine stückweise glatte Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$, so ist ∂F eine stückweise glatte Kurve im \mathbb{R}^3 mit Parameterdarstellung $(f \circ \gamma, [a, b])$.

4.39 Definition: Sei (f, M) Parameterdarstellung der Fläche $F \subseteq O$, O offen, und $g \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$.

1) $|F| := \int_M \|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\| dx$ heißt **Flächeninhalt** von der Fläche F .

2) $\int_F g d\sigma := \int_M g(f(x)) \|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\| dx$ heißt **Integral** von g über F .

Offensichtlich: $|F| = \int_F 1 d\sigma.$

4.40 Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$, $O = \mathbb{R}^2$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{2}\}$

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix}, \partial_2 f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\|\partial_1 f(x) \times \partial_2 f(x)\| = \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |F| &= \int_M \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2} dx \\ &\stackrel{\text{Polar-}}{=} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} r d\varphi dr \\ &= 2\pi \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \frac{13\pi}{3} \end{aligned}$$

4.3 Integralsätze

4.41 Integralsatz im \mathbb{R}^2 : Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$ und $M \subseteq D$ ein Standardbereich, so dass

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x_1 \leq b_1 \wedge u_2(x) \leq x_2 \leq o_2(x)\} \text{ (Projektion in } x_2\text{-Richtung)}$$

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_2 \leq x_2 \leq b_2 \wedge u_1(x) \leq x_1 \leq o_1(x)\} \text{ (Projektion in } x_1\text{-Richtung)}$$

mit geeigneten $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, wobei zusätzlich $u_2, o_2 \in C^1([a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R})$, $u_1, o_1 \in C^1([a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R})$ und $u_j(x) \leq o_j(x)$.

Dann ist ∂M eine stückweise glatte geschlossene Jordan-Kurve. Wird ∂M im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, so gelten

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot T_g ds &= - \int_M \partial_2 f dx \\ \int_{\partial M} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \cdot T_g ds &= \int_M \partial_1 f dx \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte Projektion in x_2 -Richtung. Parameterdarstellung von ∂M :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a + t(b-a) \\ u(a + t(b-a)) \end{pmatrix} & 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} b \\ u(b) + (t-1)(o(b) - u(b)) \end{pmatrix} & 1 \leq t < 2 \\ \begin{pmatrix} b + (t-2)(a-b) \\ o(b + (t-2)(a-b)) \end{pmatrix} & 2 \leq t < 3 \\ \begin{pmatrix} a \\ o(a) + (t-3)(u(a) - o(a)) \end{pmatrix} & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

(Im Fall $o(b) = u(b)$ oder $o(a) = u(a)$ entsprechende Kurvenstücke weglassen.)

$$\Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} (b-a) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 & 0 < t < 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ o(b) - u(b) \\ \vdots \end{pmatrix} \neq 0 & 1 < t < 2 \\ \begin{pmatrix} (a-b) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 & 2 < t < 3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ u(a) - o(a) \\ \vdots \end{pmatrix} \neq 0 & 3 < t < 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial M} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot T_g \, ds &\stackrel{4.26}{=} \int_0^1 \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}}_{=0} dt \\ &+ \int_2^3 \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-b \\ \dots \end{pmatrix} dt + \int_3^4 0 dt \\ &= \int_0^1 f(a+t(b-a), u(a+t(b-a))) dt (b-a) \\ &+ \int_2^3 f(b+t(a-b), u(b+t(a-b))) dt (a-b) \\ &\begin{matrix} \tau = a+t(b-a) \\ d\tau = (b-a) dt \\ \sigma = b+(t-2)(a-b) \\ d\sigma = (a-b) dt \end{matrix} \int_a^b f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_b^a f(\sigma, o(\sigma)) d\sigma \\ &=: (*) \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} - \int_M \partial_2 f(x) \, dx &= - \int_{x_1=a}^b \int_{x_2=u(x_1)}^{o(x_1)} \partial_2 f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz Diff-Int-Rechnung}}{=} - \int_a^b (f(x_1, o(x_1)) - f(x_1, u(x_1))) \, dx_1 \\ &= (*) \end{aligned}$$

Zweite Gleichung genauso mit Projektion von M in x_1 -Richtung. □

4.42 Folgerung: Voraussetzungen wie in 4.41, aber $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^2)$. Dann:

1) Satz von Green: $\int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx = - \int_{\partial M} f \cdot T_g \, ds.$

2) Satz von Gauß in der Ebene: $\int_M \nabla \cdot f \, dx = \int_{\partial M} f \cdot n \, ds,$

wobei $n = \begin{pmatrix} (T_g)_2 \\ -(T_g)_1 \end{pmatrix}$ den ins Äußere von M weisenden Normaleneinheitsvektor an ∂M bezeichnet.

Beweis: 1) $\int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx \stackrel{4.41}{=} \int_{\partial M} \left(\begin{pmatrix} -f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot T_g - \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot T_g \right) ds$

$$2) \int_M (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) dx \stackrel{4.41}{=} \int_{\partial M} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix} \cdot T_g - \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot T_g \right) ds = \int_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2) ds \quad \square$$

4.43 Beispiel: $M = \overline{B_3(0)}$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Green: $\int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) dx = \int_M 0 dx = 0$

Gauß: $\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 1 + 1 = 2$
 $\Rightarrow \int_M \nabla \cdot f dx = 2|M| = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$

Parameterdarstellung des Randes: $\gamma(t) = 3 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = 3 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad n(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot 3 \begin{pmatrix} \cos t \\ +\sin t \end{pmatrix}$$

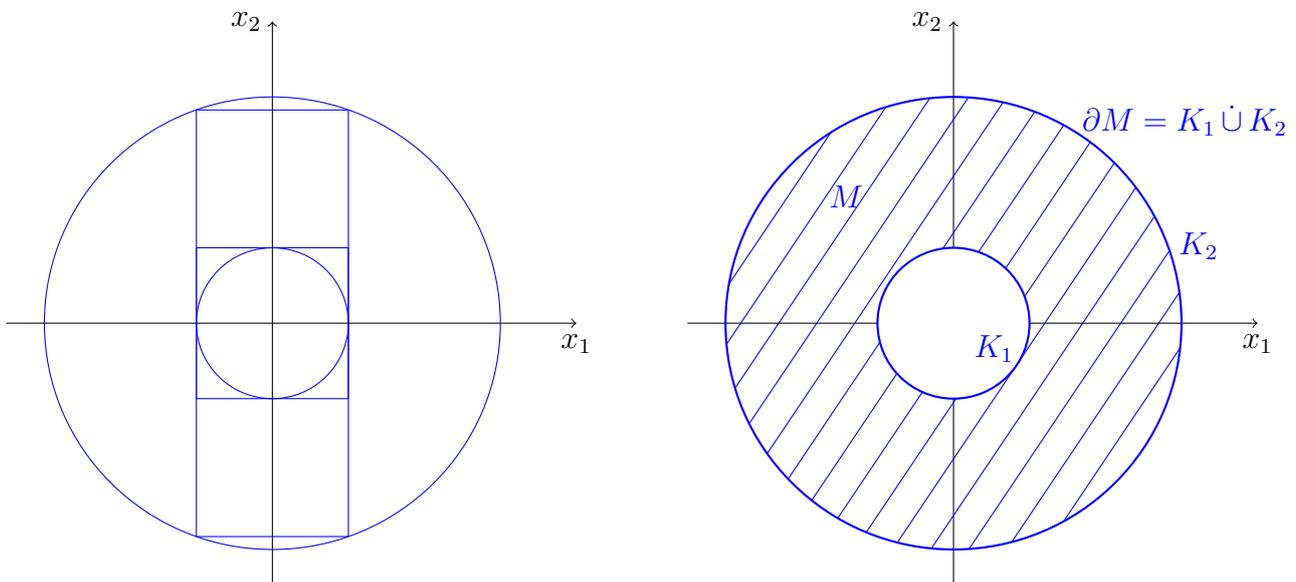
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial M} f \cdot n ds &\stackrel{4.20}{=} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot n(t) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= 2\pi \cdot 9 = 18\pi \end{aligned}$$

4.44 Definition: $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Greenscher Bereich**, wenn es Standardbereiche $M_1, \dots, M_n \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt, die die Voraussetzungen von 4.41 erfüllen, so dass

$$M = \bigcup_{j=1}^n M_j \text{ und } |M_j \cap M_k| = 0 \text{ f\u00fcr } j \neq k.$$

Der Rand ∂M setzt sich aus Teilen der R\u00e4nder $\partial M_1, \dots, \partial M_n$ zusammen und ist daher eine st\u00fcckweise glatte Kurve oder eine Vereinigung st\u00fcckweise glatter Kurven.

4.45 Beispiel: $M = \overline{B_R(0)} \setminus B_r(0)$ ist Greenscher Bereich:



4.46 Definition: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C(D \rightarrow \mathbb{R})$ und $M \subseteq D$ ein Greenscher Bereich. Besteht ∂M aus der disjunkten Vereinigung der geschlossenen Jordan-Kurven K_1, \dots, K_n : $\partial M = K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K_n$, so definiert man

$$\int_{\partial M} f \, ds := \sum_{j=1}^n \int_{K_j} f \, ds.$$

4.47 Folgerung: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^2)$ und $M \subseteq D$ ein Greenscher Bereich mit Rand $\partial M = K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} K_n$, wobei K_1, \dots, K_n geschlossene Jordan-Kurven sind. Dann

$$\begin{aligned} \int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx &= - \int_{\partial M} f \cdot T_g \, ds \quad (\text{Satz von Green}) \\ \int_M \nabla \cdot f \, dx &= \int_{\partial M} f \cdot n \, ds \quad (\text{Satz von Gau\ss}), \end{aligned}$$

wobei jede Kurve K_j so durchlaufen werden muss, dass die Menge M links von der Kurve liegt.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx &\stackrel{3.37}{=} \sum_{j=1}^n \int_{M_j} (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx \\ &\stackrel{4.42 \text{ jeweils in } M_1, \dots, M_n}{=} - \sum_{j=1}^n \int_{\partial M_j} f \cdot T_g \, ds \\ &= - \int_{\partial M} f \cdot T_g \, ds. \end{aligned}$$

Beachte: In der Summe auf der rechten Seiten der vorletzten Zeile heben sich die Randintegrale über gemeinsame Randteile der Mengen M_j weg (vgl. Skizze 4.45). □

4.48 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^2)$ mit $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$. Dann besitzt f ein Potential in D , d.h. es gibt $F \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R})$ mit $f = \nabla F$. Dies schließt die Lücke beim Beweis von 2.13.

Beweis: Wähle $x_0 \in D$ fest. Zu $x \in D$ existiert Polygonzug $P_x \subseteq D$ von x_0 zu x . Ist $\tilde{P}_x \in D$ ein weiterer Polygonzug von x_0 zu x , so gilt

$$\Rightarrow \int_{\tilde{P}_x} f \cdot T_g \, ds - \int_{P_x} f \cdot T_g \, ds = \int_{\partial M} f \cdot T_g \, ds \stackrel{\text{Green}}{=} - \int_M (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) \, dx = 0$$

$$\Rightarrow F(x) := \int_{P_x} f \cdot T_g \, ds \text{ ist wohldefiniert}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} (F(x + h \cdot e_j) - F(x)) = \frac{1}{h} \int_{\{x+t \cdot e_j: 0 \leq t \leq h\}} f \cdot T_g \, ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_j(x) \quad (\text{vgl. Beweis von 4.31}).$$

$$\Rightarrow \partial_j F = f \text{ bzw. } \nabla F = f. \quad \square$$

4.49 Stokesscher Integralsatz im \mathbb{R}^3 : Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^3)$, $F \subseteq D$ Fläche mit Parameterdarstellung (φ, M) , wobei M ein Greenscher Bereich ist (M ist dann abgeschlossen und Jordan-messbar) und $\varphi \in C^2(\tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3)$, wobei $M \subseteq \tilde{D}$, $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann gilt

$$\int_F (\nabla \times f) \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial F} f \cdot T_g \, ds.$$

Hierbei muss der Durchlaufsinne von $\partial F = f(\partial M)$ so gewählt werden, dass beim Durchlaufen der Urbildkurve ∂M die Menge M links von ∂M liegt, n muss wie in 4.35 definiert werden.

Beweis: Für den Fall, dass ∂M aus einer (nicht aus mehreren) geschlossenen Jordan-Kurve besteht. Sei $(\gamma, [a, b])$ eine stückweise glatte Parametrisierung von ∂M im richtigen Umlaufsinne. Dann ist $(\varphi \circ \gamma, [a, b])$ Parameterdarstellung von ∂F :

Es gilt $f \cdot T_g = f_1(T_g)_1 + f_2(T_g)_2 + f_3(T_g)_3$ und

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} f_1(T_g)_1 \, ds &= \int_a^b f_1(\varphi \circ \gamma(t)) \underbrace{(\varphi_1 \circ \gamma)'(t)}_{=(\nabla \varphi_1)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)} \, dt \\ &= \int_a^b (f_1 \circ \varphi)(\gamma(t)) (\nabla \varphi_1)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_{\partial M} (f_1 \circ \varphi)(\nabla \varphi_1) \cdot T_g \, ds \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_M \left(\partial_1((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \varphi_1) - \partial_2((f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \varphi_1) \right) dx \\ &\stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} \int_M \underbrace{\left(\partial_1(f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_2 \varphi_1 - \partial_2(f_1 \circ \varphi) \cdot \partial_1 \varphi_1 \right)} dx \\ &= \sum_{j=1,2}^3 \underbrace{\left((\partial_j f_1) \circ \varphi \right)} \cdot \partial_1 \varphi_j \cdot \partial_2 \varphi_1 - \sum_{j=1,2}^3 \underbrace{\left((\partial_j f_1) \circ \varphi \right)} \cdot \partial_2 \varphi_j \cdot \partial_1 \varphi_1 \\ &= \int_M \left(\underbrace{(\partial_2 f_1) \circ \varphi}_{\text{blau}} \cdot \underbrace{(\partial_1 \varphi_2 \cdot \partial_2 \varphi_1 - \partial_2 \varphi_2 \partial_1 \varphi_1)}_{\text{blau}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\partial_3 f_1}_{\text{orange}} \cdot \underbrace{(\partial_1 \varphi_3 \cdot \partial_2 \varphi_1 - \partial_2 \varphi_3 \partial_1 \varphi_1)}_{\text{orange}} \right) dx \end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned} \int_F (\nabla \times f) \cdot n \, d\sigma &= \int_M (\nabla \times f)(\varphi(x)) \cdot (\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi) \, dx \\ &= \int_M \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_2 \partial_2 \varphi_3 - \partial_1 \varphi_3 \partial_2 \varphi_2 \\ \underbrace{\partial_1 \varphi_3 \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_3}_{\text{orange}} \\ \underbrace{\partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_1 \varphi_2 \partial_2 \varphi_1}_{\text{blau}} \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

Restliche Terme aus $\int_{\partial F} f_2 \cdot (T_g)_2 \, d\sigma$, $\int_{\partial F} f_3 \cdot (T_g)_3 \, d\sigma$ analog. □

4.50 Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^3 : Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $M \subseteq D$ ein abgeschlossener Standardbereich, so dass für die Projektion in x_1 -Richtung

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_2, x_3) \in M_1 \wedge u_1(x) \leq x_1 \leq o_1(x)\}$$

gilt, wobei $M_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich ist, der die Voraussetzungen von 4.41 erfüllt, und $u_1, o_1 \in C^1(M_1 \rightarrow \mathbb{R})$ mit $u_1(x) \leq o_1(x)$ für $x \in M_1$. Entsprechendes gelte für die Projektionen in x_2 - und x_3 -Richtung. Für jede Funktion $f \in C^1(D \rightarrow \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_M \nabla \cdot f(x) \, dx = \int_{\partial M} f \cdot n \, d\sigma;$$

hierbei bezeichnet n den Normaleneinheitsvektor, der ins Äußere von M weist.

Beweis:

Zeige $\int_M \partial_1 f_1(x) \, dx = \int_{\partial M} f_1 \cdot n_1 \, d\sigma$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} \int_M \partial_1 f_1(x) \, dx &= \int_{(x_2, x_3) \in M_1} \int_{x_1=u_1(x_1, x_2)}^{o_1(x_1, x_2)} \partial_1 f_1(x) \, dx_1 \, d(x_2, x_3) \\ &= \int_{M_1} \left(f_1(\underbrace{o(x_1, x_2)}_{=:x'}, \underbrace{x_1, x_2}_{x'}) - f_1(\underbrace{u(x_1, x_2)}_{x'}, \underbrace{x_1, x_2}_{x'}) \right) d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Rechte Seite:

1) Linke Fläche: L besitzt Parameterdarstellung (φ, M_1) mit $\varphi \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_1, x_2) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow n = \frac{-1}{\|\partial_2 \varphi \times \partial_3 \varphi\|} \cdot \partial_2 \varphi \times \partial_3 \varphi = \frac{-1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} \partial_2 u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_3 u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} -1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_L f_1 \cdot n_1 \, d\sigma = \int_{M_1} f_1(\varphi(x')) \cdot \frac{-1}{\|\dots\|} \cdot \|\dots\| \, dx' = - \int_{M_1} f_1(u(x'), x') \, dx'$$

2) Rechte Fläche $\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} o(x_1, x_2) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$n = \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} \partial_2 o \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_3 o \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dots\|} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_R f_1 \cdot n_1 \, d\sigma = \int_{M_1} f_1(o(x'), x') \, dx'$$

3) Seitenfläche: $n_1 = 0 \Rightarrow \int_S f_1 \cdot n_1 \, d\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial M} f_1 \cdot n_1 \, d\sigma &= \int_L f_1 \cdot n_1 \, d\sigma + \int_R f_1 \cdot n_1 \, d\sigma + \int_S f_1 \cdot n_1 \, d\sigma \\ &= \int_{x' \in M_1} (f_1(o(x'), x') - f_1(u(x'), x')) \, dx'. \end{aligned}$$

Genauso: $\int_M \partial_j f_j(x) \, dx = \int_{\partial M} f_j \cdot n_j \, d\sigma$ für $j = 2, 3$. □

4.4 Mannigfaltigkeiten

Ziel: k -dimensionale Teilmengen des \mathbb{R}^d sinnvoll darstellen, so dass man darüber integrieren kann.

4.51 Definition: 1) Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **k -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand**, falls es zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq S$ (d.h. $U_x = O_x \cap S$, $O_x \subseteq \mathbb{R}^d$ offen) und eine Abbildung

$$\varphi_x : B_1^{(k)}(0) := \{y \in \mathbb{R}^k : \|y\| < 1\} \rightarrow U_x$$

gibt mit

- a) $x \in U_x$ und
- b) φ_x bijektiv und
- c) $\varphi_x, \varphi_x^{-1}$ stetig.

Das Paar (φ_x, U_x) heißt **Karte** auf S .

2) Eine Menge

$$\mathcal{A}(S) = \{(\varphi_{x_j}, U_{x_j}) \text{ Karte auf } S : 1 \leq j \leq n\}$$

heißt **Atlas** von S , falls

$$\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = S.$$

3) S ist **von der Klasse** $m \in \mathbb{N}_0$, falls ein Atlas $\mathcal{A}(S) = \{(\varphi_j, U_j) : 1 \leq j \leq n\}$ existiert, so dass

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j \in C^m(B_1^{(k)}(0) \rightarrow \mathbb{R}^d) \text{ und} \\ \text{Rang} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) = k \text{ in } B_1^{(k)}(0) \end{aligned} \right\} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Schreibweise: $S \in C^m$ bzw. $S \in C^\infty$, falls $S \in C^m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

4) $S \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ heißt **Null-dimensionale Mannigfaltigkeit**.

4.52 Beispiele: 1) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 4 \wedge x_3 > 0\}$ ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, $S \in C^\infty$.

Karte: $U = S$, $\varphi(y_1, y_2) = (2y_1, 2y_2, \sqrt{4 - 4y_1^2 - 4y_2^2})$:

φ ist bijektiv,

φ, φ^{-1} sind stetig,

$\varphi \in C^\infty(B_1^{(2)}(0) \rightarrow \mathbb{R}^3)$

$$\text{Rang} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = 2,$$

$\Rightarrow \mathcal{A}(S) := \{(\varphi, U)\}$ ist ein Atlas auf S .

2) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 4\}$ ist 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, $S \in C^\infty$. Atlas $\mathcal{A}(S) = \{(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_6, U_6)\}$ mit

$$\varphi_{1,2} : (y_1, y_2) \mapsto (2y_1, 2y_2, \pm\sqrt{4 - 4y_1^2 - 4y_2^2}), \quad U_{1,2} = S \cap \{x_3 \geq 0\}$$

$$\varphi_{3,4} : (y_1, y_2) \mapsto (2y_1, \pm\sqrt{4 - 4y_1^2 - 4y_2^2}, 2y_2), \quad U_{3,4} = S \cap \{x_2 \geq 0\}$$

$$\varphi_{5,6} : (y_1, y_2) \mapsto (\pm\sqrt{4 - 4y_1^2 - 4y_2^2}, 2y_1, 2y_2), \quad U_{5,6} = S \cap \{x_1 \geq 0\}$$

3) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 4 \wedge x_3 \geq 0\}$ ist keine Mannigfaltigkeit ohne Rand.

4.53 Definition: Seien

$$B_1^{(k)-}(0) := \{y \in \mathbb{R}^k : \|y\| < 1 \wedge y_1 \leq 0\} \quad (k \geq 2) \text{ bzw.}$$

$$B_1^{(1)-}(0) =]-1, 0] \text{ und } B_1^{(1)+}(0) = [0, 1[.$$

1) $S \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **k -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es zu jedem $x \in S$ eine Umgebung $U_x = O_x \cap S$, $O_x \subseteq \mathbb{R}^d$ offen gibt und eine Abbildung

$$\varphi_x : B_1^{(k)}(0) \rightarrow U_x \text{ oder } \varphi_x : B_1^{(k)-}(0) \rightarrow U_x \quad (k \geq 2)$$

$$\varphi_x :]-1, 1[\rightarrow U_x \text{ oder } \varphi_x :]-1, 0] \rightarrow U_x \text{ oder } \varphi_x : [0, 1[\rightarrow U_x \quad (k = 1)$$

existiert mit den Eigenschaften wie in 4.51, und wenn $\partial S \neq \emptyset$ gilt (siehe 2)).

2) $x \in S$ heißt **Randpunkt** von S , falls

$$\varphi_x^{-1}(U_x) = B_1^{(k)-}(0) \text{ und } \varphi_x^{-1}(x) \in \{y \in B_1^{(k)-}(0) : y_1 = 0\}$$

(im Fall $k = 1$ entsprechend). Die Menge $\partial S := \{x \in S : x \text{ ist Randpunkt von } S\}$ heißt **Rand** von S .

3) Die Begriffe *Karte*, *Atlas* und $S \in C^m$ werden wie in 4.51 definiert.

4.54 Bemerkung: Die Festlegung $x \in \partial S$ hängt nicht vom gewählten Atlas ab. Sind (φ_1, U_1) , (φ_2, U_2) zwei Karten mit $x \in U_1 \cap U_2$, so bildet $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ innere Punkte auf innere Punkte ab (Brower, zitiert in Zorich).

4.55 Beispiel: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \wedge x_3 \geq 0\}$ ist 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

∂S ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

4.56 Satz: Ist S eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ($k \geq 1$) mit Rand der Klasse C^m , so ist ∂S eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^m ohne Rand, d.h. $\partial(\partial S) = \emptyset$ (auch für $k = 1$, ohne Beweis).

Beweis: Sei $\mathcal{A}(S) = \{(\varphi_j, U_j) : 1 \leq j \leq n\}$ ein Atlas von S . Konstruiere Atlas $\tilde{\mathcal{A}}(\partial S)$ von ∂S .

Sei $x \in \partial S$ beliebig, fest. Konstruiere Karte $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ von ∂S mit $x \in \tilde{U}$.

$$x \in \partial S \Rightarrow \exists j : x \in U_j \wedge \varphi_j \in C^m(B_1^{(k)-}(0) \rightarrow \mathbb{R}^d) \wedge \varphi_j^{-1}(x) \in \{y \in B_1^{(k)-}(0) : y_1 = 0\}.$$

Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j(y_1, \dots, y_{k-1}) &:= \varphi_j(0, y_1, \dots, y_{k-1}) \text{ für } y \in B_1^{(k-1)}(0) \\ \tilde{U}_j &:= U_j \cap \partial S \stackrel{U_j=O_j \cap S}{=} O_j \cap \partial S, O_j \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \tilde{U}_j = U_j \cap \partial S \\ \tilde{\varphi}_j : B_1^{(k-1)}(0) \rightarrow \tilde{U}_j \text{ ist surjektiv:} \\ x_1 \in \tilde{U}_j \Rightarrow x_1 \in \partial S \Rightarrow \varphi_j^{-1}(x_1) \in \{y \in B_1^{(k)-}(0) : y_1 = 0\} = \{(0, y') : y' \in B_1^{(k-1)}(0)\} \\ \Rightarrow x_1 = \varphi_j(0, y_1, \dots, y_{k-1}) \in \text{Bild}(\tilde{\varphi}_j) \end{cases}$$

Insbesondere: $\tilde{\varphi}_j : B_1^{(k-1)}(0) \rightarrow \tilde{U}_j$ bijektiv, $\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_j^{-1}$ stetig als Einschränkungen stetiger Funktionen,

$$\tilde{\varphi}_j \in C^m(B_1^{(k-1)}(0) \rightarrow \mathbb{R}^d), \text{Rang} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial (y_1, \dots, y_{k-1})} \right) = \text{Rang} \left(\frac{\partial \varphi_j(0, y_1, \dots, y_{k-1})}{\partial (y_1, \dots, y_{k-1})} \right) = k - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j) \text{ ist Karte auf } \partial S, \\ \tilde{\mathcal{A}}(S) := \{(\tilde{\varphi}_j, \tilde{U}_j) : 1 \leq j \leq n \wedge \varphi_j^{-1}(U_j) = B_1^{(k)-}(0)\} \text{ ist Atlas von } \partial S, \text{ zeigt } \partial S \in C^m \end{cases} \quad \square$$

4.57 Definition und Satz: Seien $k \geq 1$, $S \in C^1$ k -dimensionale Mannigfaltigkeit, $x_0 \in S$ und (φ_0, U_0) Karte auf S mit $x_0 \in U_0$. Dann heißt

$$T(x_0) := \text{LH} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1}(\varphi_0^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_k}(\varphi_0^{-1}(x_0)) \right\}$$

Tangentialraum in x_0 . Es gelten

- 1) $\dim T(x_0) = k$ und

2) $T(x_0)$ ist unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis: 1) Folgt aus $\text{Rang} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(y) \right) = k$ für $y \in B_1^{(k)}(0)$

2) Sei (φ_1, U_1) eine weitere Karte mit $x_0 \in U_1$.

Setze $D_j := \varphi_j^{-1}(U_0 \cap U_1)$

φ_j stetig $\Rightarrow D_j$ offen

φ_0, φ_1 bijektiv $\Rightarrow \varphi_0^{-1} \circ \varphi_1 : D_1 \rightarrow D_0$ bijektiv

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_l}(z_0) &= \frac{\partial(\varphi_0 \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_1)}{\partial z_l}(z_0) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^d \underbrace{\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_j}(y_0)}_{\in T(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1)_j}{\partial z_l}(z_0)}_{\in \mathbb{R}} \\ &\in T(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{LH} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(\varphi_1^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}(\varphi_1^{-1}(x_0)) \right\}$ ist Unterraum von $T(x_0)$

1) $\Rightarrow \dim \text{LH}\{\dots\} = k = \dim(T(x_0)) \Rightarrow \text{LH}\{\dots\} = T(x_0)$. □

4.58 Folgerung: Voraussetzungen wie 4.57, (φ_1, U_1) weitere Karte mit $x_0 \in U_1$ Dann

$$\det \left(\frac{\partial(\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1)}{\partial z}(\varphi_1^{-1}(x_0)) \right) \neq 0.$$

Insbesondere ändert die Determinante

$$\det \left(\frac{\partial(\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1)}{\partial z}(z) \right)$$

das Vorzeichen nicht, so lange $z \in \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1)$.

4.5 Orientierung

4.59 Orientierung des Raumes: Zwei Basen $\{b_1, \dots, b_k\}$, $\{c_1, \dots, c_k\}$ eines k -dimensionalen Raumes heißen **gleich orientiert**, falls

$$b_j = \sum_{l=1}^k \alpha_{jl} \cdot c_l \wedge \det(\alpha_{jl}) > 0,$$

oder äquivalent

$$c_l = \sum_{j=1}^k \beta_{lj} \cdot b_j \wedge \underbrace{\det(\beta_{lj})}_1 > 0. \\ = \frac{1}{\det(\alpha_{jl})}$$

4.60 Beispiele: 1) Sei $\{b_1, b_2\}$ Basis des \mathbb{R}^2 . Dann: $\{-b_1, -b_2\}$ ist gleich orientiert, $\{-b_1, b_2\}$ ist nicht gleich orientiert.

2) $\{b_1, b_2, b_3\}$ Basis des \mathbb{R}^3 : $\{-b_1, -b_2, b_3\}$ ist gleich orientiert, $\{-b_1, -b_2, -b_3\}$ ist nicht gleich orientiert.

4.61 Orientierung von Mannigfaltigkeiten: Sei $S \in C^1$ und $x_0 \in S$.

1) Zwei Karten $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ von S mit $x_0 \in U_1 \cap U_2$ heißen **gleich orientiert**, falls

$$\det \left(\frac{\partial(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)_j}{\partial z_l} \right)_{l,j=1,\dots,k} (z) > 0$$

für $z = \varphi_2^{-1}(x_0)$ und damit für alle $z \in \varphi^{-1}(U_1 \cap U_2)$. (Die Determinante hängt stetig von z ab und ist immer $\neq 0$ (vgl.4.58))

Nach dem Beweis von 4.57 bedeutet dies: Die Basen

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(\varphi_1^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k}(\varphi_1^{-1}(x_0)) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}(\varphi_2^{-1}(x_0)), \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_k}(\varphi_2^{-1}(x_0)) \right\}$$

von $T(x_0)$ sind gleich orientiert.

2) Zwei Karten (φ_1, U_1) und (φ_2, U_2) auf S heißen **kompatibel**, wenn $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder wenn sie gleich orientiert sind.

3) Ein Atlas von S heißt **orientiert**, wenn alle seine Karten paarweise kompatibel sind.

4) S heißt **orientierbar**, wenn mindestens ein orientierter Atlas auf S existiert.

5) Zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}(S), \tilde{\mathcal{A}}(S)$ von S heißen **kompatibel**, falls $\mathcal{A}(S) \cup \tilde{\mathcal{A}}(S)$ ein orientierter Atlas von S ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Atlanten von S . Eine Äquivalenzklasse ist eine **Orientierung** von S .

4.62 Beispiele: 1) $S = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 3 \right\}$. Definiere einen Atlas:

$$\begin{aligned} \varphi_1 :]-1, 0] \rightarrow S : z \mapsto \begin{pmatrix} 3(z+1) \\ 3(z+1) \\ 3(z+1) \end{pmatrix} : U_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 < t \leq 3 \right\} \\ \varphi_2 : [0, 1[\rightarrow S : z \mapsto \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 2z \end{pmatrix} : U_2 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : 0 \leq t < 2 \right\} \end{aligned}$$

$$\varphi_1^{-1} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{3} - 1 \quad \varphi_2^{-1} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{2},$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ sind stetig, $U_1 \cup U_2 = S \Rightarrow \mathcal{A}(S) := \{(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)\}$ ist Atlas von S .
Ist $\mathcal{A}(S)$ orientiert?

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(z) &= \varphi_1^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 2z \end{pmatrix} = \frac{2}{3}z - 1 \\ \Rightarrow \det \left(\frac{d(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)}{dz}(z) \right) &= \frac{2}{3} > 0 \\ \Rightarrow \mathcal{A}(S) \text{ ist orientiert, } S \text{ ist orientierbar.} \end{aligned}$$

- 2) $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 2\}$
 S ist orientierbar, ∂S sind zwei disjunkte Kreise.
Durch eine Orientierung von S wird eine Orientierung von ∂S induziert (siehe unten).
- 3) Möbius-Band: nicht orientierbar
- 4) Kleinsche Flasche: nicht orientierbar

4.63 Satz und Definition: Sei $S \in C^1$ orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $k \geq 2$ mit Rand und $\mathcal{A}(S)$ orientierter Atlas von S . Durch die Konstruktion im Beweis von 4.56 wird ein orientierter Atlas $\mathcal{A}(\partial S)$ definiert. Die dadurch definierte Orientierung von ∂S heißt **verträglich** mit der Orientierung von S .

Beweis: Sei $\mathcal{A}(s)$ orientierter Atlas von S , $x_0 \in \partial S$, $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2) \in \mathcal{A}(S)$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$

$$\mathcal{A}(S) \text{ orientiert} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)}{\partial z}(\varphi_2^{-1}(x_0)) \right) > 0$$

Sei $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. ψ bildet Rand- auf Randpunkte ab

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0, z_2, \dots, z_k) = 0 & \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial z_j}(0, z_2, \dots, z_k) = 0 \quad j = 2, \dots, k \\ \psi_1(z_1 < 0, z_2, \dots, z_k) < 0 & \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}(0, z_2, \dots, z_k) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &< \det \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial z_j} \right)_{l,j=1,\dots,k} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} & \dots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}(\varphi_2^{-1}(x_0))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\det \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial z_j} \right)_{l,j=2,\dots,k}}_{> 0} \end{aligned}$$

Mit Bezeichnungen aus 4.56: $\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} (0, z_2, \dots, z_k) = \tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2(z_2, \dots, z_k)$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2}{\partial z} (\tilde{\varphi}_2^{-1}(x_0)) \right) > 0$$

$\Rightarrow (\tilde{\varphi}_1, \tilde{U}_1), (\tilde{\varphi}_2, \tilde{U}_2)$ sind gleich orientierte Karten von ∂S

□

4.64 Beispiel: $S = \overline{B_1^{(2)}}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$.

1) Ist $A(S)$ Atlas, der (φ, U) mit

$$\varphi(x) = x, \quad U = B_1^{(2)}(0)$$

enthält, so gilt: Die verträgliche Orientierung von ∂S ist die im Gegenuhrzeigersinn.

2) Ist $A(S)$ Atlas, der (φ, U) mit $\varphi(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ enthält, so gilt: Die verträgliche Orientierung von ∂S ist die im Uhrzeigersinn.

4.6 Zerlegung der Eins

4.65 Definition: Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Der **Träger** (Support) von f ist

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$$

4.66 Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine abzählbare oder endliche Menge $\{\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}) : j \in J\}$ mit

- 1) $\forall j \in J \forall x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ und
- 2) $\forall j \in J : \text{supp}(\psi_j)$ ist kompakt und
- 3) $\forall j \in J \exists \alpha \in A : \text{supp}(\psi_j) \subseteq O_\alpha$ und
- 4) $\forall x \in M : \{j \in J : \psi_j(x) \neq 0\}$ ist endlich und
- 5) $\forall x \in M : \sum_{j \in J} \psi_j(x) = 1$.

Die Familie $\{\psi_j : j \in J\}$ heißt **Zerlegung der Eins** bezüglich $\{O_\alpha\}$. Im Fall, dass M kompakt ist, kann J als endlich angenommen werden.

4.67 Hilfssatz: Sei $\delta > 0$ Dann gibt es eine Funktion $\varphi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$\varphi_\delta \geq 0, \quad \text{supp}(\varphi_\delta) \subseteq \overline{B_\delta(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x) dx = 1$$

Beweis: 1) $g_1(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow g_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

2) $g_2(x) := g_1(1 - (x_1^2 + \dots + x_d^2))$ für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\Rightarrow g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}) \wedge \text{supp}(g_2) = \overline{B_1(0)} \wedge g_2(x) \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

3) $g_3(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} g_2(x) dx} g_2(x)$. Dann gilt zusätzlich $\int_{\mathbb{R}^d} g_3(x) dx = 1$.

4) $\varphi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} g_3\left(\frac{x}{\delta}\right)$ erfüllt die geforderten Eigenschaften, beachte

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x) dx \stackrel{\substack{y = \frac{x}{\delta} \\ dx = \delta^d dy}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g_3(y) dy = 1$$

□

4.68 Hilfssatz: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $M \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $K \cap M = \emptyset$. Dann

$$d(K, M) := \inf\{\|x - y\| : x \in M \wedge y \in K\} > 0,$$

und das Infimum ist ein Minimum.

Beweis: Wähle (x_n) in K , (y_n) in M mit $\|x_n - y_n\| \rightarrow d(K, M)$.

K kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k}) : x_{n_k} \rightarrow x \in K$ für $k \rightarrow \infty$

$\|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k}\| \Rightarrow (y_{n_k})$ ist beschränkt

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $y_{n_{k_l}} : y_{n_{k_l}} \rightarrow y \in \mathbb{R}^d$

M abgeschlossen, $y_{n_{k_l}} \in M \Rightarrow y \in M$

$$\Rightarrow \|x - y\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|y_{n_{k_l}} - x_{n_{k_l}}\| = d(K, M)$$

$$K \cap M = \emptyset \Rightarrow x \neq y \Rightarrow d(K, M) = \|x - y\| \neq 0$$

□

4.69 Hilfssatz: Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq O$, K kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R})$ mit

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \wedge \text{supp}(\varphi) \subseteq O \wedge \varphi(x) = 1 \text{ auf } K \wedge \text{supp}(\varphi) \text{ beschränkt.}$$

Beweis: Im Fall $O = \mathbb{R}$ setze $\delta := 1$, andernfalls $\delta := \frac{1}{4} d(K, \partial O) > 0$.

Setze $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d : d(K, x) \leq \delta\}$, K_δ ist kompakt.

$\{B_\delta(x) : x \in K_\delta\}$ ist offene Überdeckung von K_δ

$$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in K_\delta : K_\delta \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\delta(x_j) =: O'$$

$\Rightarrow \overline{O'} \subseteq O$ und $\overline{O'}$ kompakt und Jordan-messbar.

$$\Rightarrow \varphi(x) := \int_{O'} \varphi_\delta(x - y) dy \text{ mit } \varphi_\delta \text{ aus 4.67}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

□

4.70 Folgerung: Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq O$ kompakt. Dann existiert ein $O' \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $K \subseteq O' \subseteq \overline{O'} \subseteq O$.

4.71 Hilfssatz: $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $\{O_1, \dots, O_n\}$ offene Überdeckung von K . Dann existieren $O'_1, \dots, O'_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, so dass

$$\overline{O'_j} \subseteq O_j \wedge K \subseteq \bigcup_{j=1}^n O'_j.$$

Beweis: $B_1 := K \cap (\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{j=2}^n O_j)$ ist kompakt, $B_1 \subseteq O_1$.

Wähle O'_1 offen und beschränkt mit $B_1 \subseteq O'_1 \subseteq \overline{O'_1} \subseteq O_1$ (letzte Folgerung)

$\Rightarrow \{O'_1, O_2, \dots, O_n\}$ ist offene Überdeckung von K .

Sukzessive alle weiteren O_j ersetzen. □

Beweis von 4.66: 1) Falls M kompakt: Setze $O := \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$, O ist offen

$M \subseteq O$, M kompakt $\Rightarrow \exists \delta > 0 : M_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, M) \leq \delta\} \subseteq O$
 M_δ kompakt, $\{O_\alpha\}$ offene Überdeckung von M_δ

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A : M \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_{\alpha_j}$$

Letzter Satz $\Rightarrow \exists O_1, \dots, O_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit

$$\overline{O_j} \subseteq O_{\alpha_j} \wedge M_\delta \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_j$$

4.69 $\Rightarrow \exists \varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}) : \varphi_j(x) = 1$ auf $\overline{O_j} \wedge \varphi_j(x) \geq 0 \wedge \text{supp}(\varphi_j) \subseteq O_{\alpha_j}$

Setze $\tilde{\psi}_j(x) := \frac{1}{\sum_{l=1}^n \varphi_l(x)} \varphi_j(x)$ für $x \in M_\delta$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \tilde{\psi}_j(x) = 1 \text{ für } x \in M_\delta \wedge \tilde{\psi}_j \in C^\infty(M_\delta^\circ \rightarrow \mathbb{R}) \wedge 0 \leq \tilde{\psi}_j(x) \leq 1$$

4.69 $\Rightarrow \exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}) : \varphi(x) = 1$ auf $M \wedge 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \wedge \text{supp}(\varphi) \subseteq M_\delta^\circ$.

Setze

$$\psi_j(x) := \begin{cases} \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^n \varphi_l(x)} \varphi_j(x) & x \in M_\delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\psi_j : j = 1, \dots, n\}$ hat alle gewünschten Eigenschaften.

- 2) M beliebig. Beweise die Existenz der Zerlegung der Eins anstelle für M für $M = \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$. Sei

$$M_j := \{x \in M : \|x\| \leq j \wedge d(x, \partial M) \geq \frac{1}{j}\}$$

$\Rightarrow M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, M_j kompakt

Für festes j ist $\{O_j \cap (\text{int } M_{j+1} \cap \mathbb{R}^d \setminus M_{j-2}) : \alpha \in A\}$ offene Überdeckung von $M_j \setminus \text{int}(M_{j-1})$. Nach Fall 1 existiert eine endliche Zerlegung der Eins $\{\psi_{jk} : k = 1, \dots, N_j\}$. Setze

$$\sigma(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_j} \psi_{jk}(x)$$

Nach Konstruktion existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U(x)$, so dass die Summe in $U(x)$ endlich ist. $\Rightarrow \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R})$.

Außerdem: $\sigma(x) > 0$ für $x \in M$.

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\psi_{jk}}{\sigma} : j \in \mathbb{N} \wedge k = 1, \dots, N_j \right\} \text{ ist Zerlegung der Eins}$$

□

4.7 Integration über Mannigfaltigkeiten

4.72 Definition: Sei $1 \leq k \leq n$, $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann ist der **k -Inhalt** des von v_1, \dots, v_k aufgespannten Parallelepipeds definiert durch

$$V^{(k)}(v_1, \dots, v_k) := \left(\det \left(\underbrace{(v_1 \dots v_k)^T}_{k \times n\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{(v_1 \dots v_k)}_{n \times k\text{-Matrix}} \right) \right)^{1/2}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k \times k\text{-Matrix}}$

4.73 Bemerkungen: 1) Sei $A := (v_1 \dots v_k)$: $A^T \cdot A$ ist symmetrisch

$\Rightarrow \det(A^T \cdot A) = \text{Produkt der Eigenwerte } \lambda_1, \dots, \lambda_k$

Für $x \in \mathbb{R}^k$: $\langle A^T \cdot A \cdot x, x \rangle = \langle A \cdot x, A \cdot x \rangle \geq 0$

\Rightarrow Alle Eigenwerte $\lambda_j \geq 0$

$\Rightarrow (\det(A^T A))^{1/2}$ ist reell

- 2) Fall $k = 1$: $V^{(1)}(v) = \sqrt{\det(v^T \cdot v)} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \|v\|$: Im Fall $k = 1$ gibt $V^{(1)}(v)$ die Länge von v an.

- 3) Fall $k = n$:

$$V^{(n)}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(v_1 \dots v_n)^T \cdot \det(v_1 \dots v_n)} = \sqrt{(\det(\dots))^2} = |\det(v_1 \dots v_n)| \sqrt{1}$$

- 4) $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear abhängig $\Rightarrow \text{Rang}(v_1, \dots, v_k) < k$

$$\Rightarrow \text{Rang} \left((v_1, \dots, v_k)^T \cdot (v_1, \dots, v_k) \right) < k \Rightarrow V^{(k)}(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

- 5) $S \in C^1$ Mannigfaltigkeit der Dimension k , (φ, U) Karte von S , $x_0 \in U$, $y_0 := \varphi^{-1}(x_0)$. Dann ist

$$\sqrt{\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0) \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0) \right)}$$

der k -Inhalt des Parallelepipeds, das von den Tangentialvektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y_0)$ aufgespannt wird.

4.74 Definition: Eine Mannigfaltigkeit $S \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **kompakt**, wenn sie als Teilmenge des \mathbb{R}^d kompakt ist.

4.75 Definition: Seien $1 \leq k \leq d$, $S \in C^1$ kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension k , $\mathcal{A}(S) = \{(\varphi_j, U_j) : 1 \leq j \leq n\}$ orientierter Atlas von S , $O_j \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $U_j = S \cap O_j$ für $j = 1, \dots, n$, und $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ Zerlegung der Eins, so dass

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \text{ für } x \in S \quad \text{und } \forall j \in \{1, \dots, n\} : \text{supp}(\psi_j) \subseteq O_j.$$

Sei weiter $S \subseteq O$, O offen und $f \in C(O \rightarrow \mathbb{R})$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \int_S f \, dV^{(k)} &:= \sum_{j=1}^n \int_S \psi_j \cdot f \, dV^{(k)} \\ &:= \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j^{-1}(U_j)} (\psi_j \cdot f)(\varphi_j(y)) V^{(k)} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}(y) \right) dy. \end{aligned}$$

das **Integral** von f über S .

Der **k -Inhalt** von S ist durch

$$V^{(k)}(S) := \int_S 1 \, dV^{(k)}$$

definiert.

4.76 Bemerkung: Die Definition von $\int_S f \, dV^{(k)}$ ist unabhängig vom gewählten Atlas und von der gewählten Zerlegung der Eins.

4.77 Satz von Gauß-Ostrogradski: Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $S \subseteq O$ kompakte orientierte C^1 -Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension d . Für $f \in C^1(O \rightarrow \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_S \nabla \cdot f \, dV^{(d)} = \int_{\partial S} f \cdot n \, dV^{(d)},$$

wobei n den ins Äußere von S weisenden Normaleneinheitsvektor bezeichnet.