Prüfungsklausur — Analysis III/ Fortgeschrittene Analysis (WS 2019/20)

Termin:	*16.05.2020*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*
Maximal erreichbar:	*45 Punkte*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

© bjoern.derijk@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{y}\cos(x), \quad y(0) = y_0$$

mit $y_0 \neq 0$.

(a) Seien $a > 0$, $b := \frac{|y_0|}{2}$ und $Q := [-a, a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem die Voraussetzungen das Satzes von Picard-Lindelöf in Q erfüllt und somit eine eindeutige lokale Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von y_0.

(c) Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an. Für welche Werte von y_0 ist die Lösung global, für welche Werte von y_0 existiert nur eine lokale Lösung?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und die lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + dy \ = \ 0. \tag{$*$}$$

(a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein äquivalentes lineares Differentialgleichungssystem für eine Unbekannte $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um.

(b) Beweisen Sie: Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $(*)$ ist identisch mit dem charakteristischen Polynom der Matrix, die in Ihrem System aus Teilaufgabe (a) auftritt.

(c) a, b, c, d seien nun so gewählt, dass das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung $(*)$ durch $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 4)$ gegeben ist. Geben Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ an.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben sind die Abbildung

$$g :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x^2 - 2y^2 \\ 2x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$B \ := \ \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \geq 0 \ \wedge \ 4 \leq 2\sqrt{u + v} \leq v - u \ \wedge \ 4 \leq v - u \leq 16\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass g injektiv ist, und bestimmen Sie $g^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(g)$.

(b) Bestimmen Sie $M := g^{-1}(B)$. M ist Jordan messbar (muss nicht nachgewiesen werden).

(c) Weisen Sie nach, dass die Voraussetzungen für den Transformationssatz erfüllt sind.

(d) Berechnen Sie das Jordan-Maß $|B| = \big|g(M)\big|$.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe ist es nicht erforderlich, die Menge B zu skizzieren.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben sind der abgeschlossene Standardbereich

$$M \ := \ \big\{(x,y) : -2 \le x \le 2 \ \wedge \ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{8-2x^2}\big\}$$

und die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie M.

(b) Geben Sie eine (stückweise C^1-) Parameterdarstellung der Randkurve ∂M an, so dass beim Durchlaufen mit wachsenden Parameterwerten die Menge M links von der Kurve liegt.

(c) Weisen Sie nach, dass $\varphi(M)$ die Definition einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ erfüllt. (Da M ein Standardbereich ist, ist M Jordan-messbar. Dies muss nicht nachgewiesen werden.)

(d) Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Integral

$$\int_{\varphi(M)} (\nabla \times f) \cdot n \, \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2,x_3) \ = \ x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2$$

und das Ellipsoid

$$N \ := \ \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1\big\}.$$

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f auf N ihr Minimum und ihr Maximum annimmt.

(b) Begründen Sie ohne die Methode von Lagrange, dass das Minimum der Funktionswerte Null ist, und geben Sie einen Punkt auf N an, in dem das Minimum angenommen wird.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange das Maximum von f auf N. Geben Sie einen Punkt auf N an, in dem f das Maximum annimmt.