Prüfungsklausur — Analysis III/ Fortgeschrittene Analysis (WS 2019/20)

Termin:	*16.05.2020*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*
Maximal erreichbar:	*45 Punkte*

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{y}\cos(x), \quad y(0) = y_0$$

mit $y_0 \neq 0$.

(a) Seien $a > 0$, $b := \frac{|y_0|}{2}$ und $Q := [-a, a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem die Voraussetzungen das Satzes von Picard-Lindelöf in Q erfüllt und somit eine eindeutige lokale Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von y_0.

(c) Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an. Für welche Werte von y_0 ist die Lösung global, für welche Werte von y_0 existiert nur eine lokale Lösung?

Lösung 1

(a) Da Q keinen Punkt $(x, 0)$ enthält, ist $f(x, y) := \frac{1}{y}\cos(x)$ auf Q stetig. Außerdem erfüllt f auf Q die Lipschitzbedingung

$$\big|f(x,y) - f(x,y')\big| \;=\; \Big|\Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y'}\Big)\cos(x)\Big| \;=\; \frac{|y' - y|}{|y\,y'|}\,|\cos(x)| \;\leq\; \frac{1}{b^2}|y' - y|,$$

da $|y|, |y'| \geq b$ nach Definition von Q.

Alternative Begründung: Da Q keinen Punkt $(x, 0)$ enthält, gilt $f \in C^1(Q \to \mathbb{R})$ und Q ist kompakt. Aus einer Bemerkung in der Vorlesung folgt dann

$$\big|f(x,y) - f(x,y')\big| \;\leq\; c \cdot |y' - y| \quad \big(\text{mit } c = \max_{(x,y)\in Q} \big|\partial_y f(x,y)\big|\big).$$

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Picard-Lindelöf erfüllt.

(b)
$$\begin{aligned}
y' = \frac{1}{y}\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \int y\,\mathrm{d}y = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x \;\wedge\; y \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \sin(x) + c \;\wedge\; y \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 = 2\sin(x) + d \;\wedge\; y \neq 0 \quad (d = 2c) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2\sin(x) + d} \quad \text{falls } 2\sin(x) + d > 0
\end{aligned}$$

$y_0 = y(0) = \pm\sqrt{d} \;\Leftrightarrow\; d = y_0^2$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung im Fall $y_0 > 0$: $y(x) = \sqrt{y_0^2 + 2\sin(x)}$ (Definitionsbereich siehe c)
im Fall $y_0 < 0$: $y(x) = -\sqrt{y_0^2 + 2\sin(x)}$ (Definitionsbereich siehe c)

(c) Falls $y_0^2 > 2$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $y_0^2 + 2\sin(x) > 0$
$\Rightarrow$ die Lösung existiert auf ganz $\mathbb{R}$, also liegt eine globale Lösung vor.

Falls $y_0^2 \leq 2$: $y_0^2 + 2\sin(x) > 0$ gilt nur auf dem Intervall $\big]\arcsin\big(-\frac{y_0^2}{2}\big), \pi - \arcsin\big(-\frac{y_0^2}{2}\big)\big[$ bzw. auf Verschiebungen dieses Intervalls um $2k\pi$

Da die Anfangsbedingung in $x = 0$ gegeben ist, existiert die Lösung nur auf dem Intervall $\big]\arcsin\big(-\frac{y_0^2}{2}\big), \pi - \arcsin\big(-\frac{y_0^2}{2}\big)\big[\;=\; \big]-\arcsin\big(\frac{y_0^2}{2}\big), \pi + \arcsin\big(\frac{y_0^2}{2}\big)\big[$, insbesondere ist die Lösung lokal.

Ergänzung im Fall $y_0^2 = 2$: Die Funktion $y(x)$ kann zwar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden, aber

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + 2\sin(x)}} \cdot 2\cos(x) \to \pm\infty \text{ für } x \to \pm\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y \text{ ist keine globale Lösung.}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und die lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + dy \;=\; 0. \tag{$*$}$$

(a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein äquivalentes lineares Differentialgleichungssystem für eine Unbekannte $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um.

(b) Beweisen Sie: Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $(*)$ ist identisch mit dem charakteristischen Polynom der Matrix, die in Ihrem System aus Teilaufgabe (a) auftritt.

(c) a, b, c, d seien nun so gewählt, dass das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung $(*)$ durch $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 4)$ gegeben ist. Geben Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ an.

Lösung 2

(a) Setze $u_1 := y$, $u_2 := y'$, $u_3 := y''$ und $u_4 := y'''$. Dann folgt

$$u' \;=\; \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ -au_4 - bu_3 - cu_2 - du_1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{pmatrix} \cdot u$$

(b) Charakteristisches Polynom zu $(*)$:

$$p(\lambda) \;=\; \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d.$$

Charakteristisches Polynom der Matrix:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\lambda) \;&=\; \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -d & -c & -b & -a-\lambda \end{pmatrix} \\
&=\; -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -c & -b & -a-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -d & -b & -a-\lambda \end{pmatrix} \\
&=\; -\lambda\big(\lambda^2(-a-\lambda) - c + 0 - 0 - b\lambda - 0\big) - 1(-d) \cdot 1 \\
&=\; \lambda^4 + a\lambda^3 + c\lambda + b\lambda^2 + d \\
&=\; p(\lambda)
\end{aligned}$$

(c) Allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x \mathrm{e}^{-2x} + c_3 \sin(2x) + c_4 \cos(2x)$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben sind die Abbildung

$$g :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x^2 - 2y^2 \\ 2x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$B \;:=\; \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v \geq 0 \;\wedge\; 4 \leq 2\sqrt{u+v} \leq v-u \;\wedge\; 4 \leq v-u \leq 16\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass g injektiv ist, und bestimmen Sie $g^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(g)$.

(b) Bestimmen Sie $M := g^{-1}(B)$. M ist Jordan messbar (muss nicht nachgewiesen werden).

(c) Weisen Sie nach, dass die Voraussetzungen für den Transformationssatz erfüllt sind.

(d) Berechnen Sie das Jordan-Maß $|B| = \big|g(M)\big|$.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe ist es nicht erforderlich, die Menge B zu skizzieren.

Lösung 3

(a)
$$\begin{aligned} g(x,y) = (u,v) \in \mathrm{Bild}(g) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2y^2 = u \;\wedge\; 2x^2 + 2y^2 = v \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^2 = u+v \;\wedge\; 4y^2 = v-u \\ &\overset{x>0,\,y>0}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{u+v} \;\wedge\; y = \frac{1}{2}\sqrt{v-u} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; (x,y) \text{ eindeutig } \;\Rightarrow\; g \text{ ist injektiv, } g^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{u+v} \\ \frac{1}{2}\sqrt{v-u} \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{aligned} g(x,y) \in B \quad &\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 \geq 0 \;\wedge\; 4 \leq 4x \leq 4y^2 \;\wedge\; 4 \leq 4y^2 \leq 16 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq y^2 \;\wedge\; 1 \leq y^2 \leq 4 \\ &\overset{y>0}{\Leftrightarrow} \quad 1 \leq x \leq y^2 \;\wedge\; 1 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; M = g^{-1}(B) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 \;\wedge\; 1 \leq x \leq y^2\big\}$$

(c) Mit $O =]0,\infty[\times]0,\infty[$ offen gilt $g \in C^1(O \to \mathbb{R}^2)$ und

$$\det\big(g'(x)\big) \;=\; \det\begin{pmatrix} 4x & -4y \\ 4x & 4y \end{pmatrix} \;=\; 32xy \;>\; 0 \text{ für } (x,y) \in O.$$

Außerdem bereits nachgewiesen: g ist injektiv und $M \subseteq O$.

(d)
$$\begin{aligned} |B| \;&=\; \int_{g(M)} 1 \,\mathrm{d}(u,v) \;\overset{\text{Transformationssatz}}{=}\; \int_M 1 \cdot 32xy \,\mathrm{d}(x,y) \\ &\overset{M \text{ projizierbar}}{=}\; 32\int_{y=1}^{2}\int_{x=1}^{y^2} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; 32\int_{y=1}^{2} y\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=1}^{y^2} \mathrm{d}y \\ &=\; 32\int_{y=1}^{2}\Big(\frac{y^5}{2} - \frac{y}{2}\Big)\,\mathrm{d}y \;=\; 16\Big[\frac{y^6}{6} - \frac{y^2}{2}\Big]_{y=1}^{2} \\ &=\; 16\Big(\frac{64}{6} - \frac{1}{6} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2}\Big) \;=\; \frac{16}{6} \cdot 54 \\ &=\; 144 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben sind der abgeschlossene Standardbereich

$$M \;:=\; \left\{(x,y) : -2 \le x \le 2 \;\wedge\; -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{8-2x^2}\right\}$$

und die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie M.

(b) Geben Sie eine (stückweise C^1-) Parameterdarstellung der Randkurve ∂M an, so dass beim Durchlaufen mit wachsenden Parameterwerten die Menge M links von der Kurve liegt.

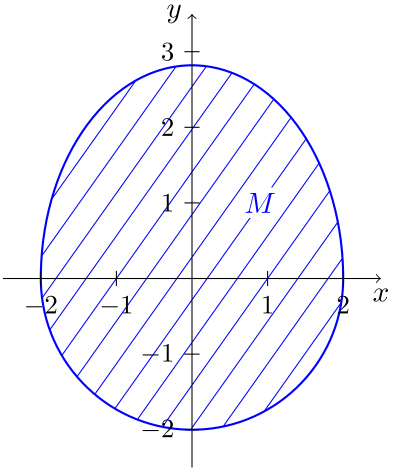
(c) Weisen Sie nach, dass $\varphi(M)$ die Definition einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ erfüllt. (Da M ein Standardbereich ist, ist M Jordan-messbar. Dies muss nicht nachgewiesen werden.)

(d) Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Integral

$$\int_{\varphi(M)} (\nabla \times f) \cdot n \,\mathrm{d}\sigma.$$

Lösung 4

(a)



(b) $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} & -\pi \le t \le 0 \\ \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sqrt{2}\sin(t) \end{pmatrix} & 0 < t \le \pi \end{cases}$

(c)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ ist injektiv, denn aus } \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ folgt } x = u \text{ und } y = v \\ \text{Außerdem } \varphi \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3), \\ \operatorname{Rang}\big(\partial_x\varphi \quad \partial_y\varphi\big) \;=\; \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \;=\; 2 \\ \text{und } M \text{ ist abgeschlossen und Jordan-messbar} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\varphi(M) \text{ ist Fläche}$$

(d) Es gilt $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ (als Voraussetzung für den Satz von Stokes benötigt).
Beachte: $\varphi(M)$ wird durch $\varphi \circ \gamma$ berandet. Es gilt

$$\varphi \circ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } -\pi \le t \le 0 \text{ und } \varphi \circ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sqrt{2}\sin(t) \\ 4\big(1+\sin^2(t)\big) \end{pmatrix} \text{ für } 0 < t \le \pi$$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(M)} (\nabla \times f) \cdot n \, \mathrm{d}\sigma \overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{Stokes}}{=}} \int_{\varphi\circ\gamma} f \cdot T_g \, \mathrm{d}s \quad &= \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\varphi \circ \gamma(t)\big) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(t) \, \mathrm{d}t \\
= \int_{-\pi}^{0} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t &+ \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\sqrt{2}\cos(t) \\ 8\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
= \int_{-\pi}^{0} 4 \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \big(4\sqrt{2} + 16\sin(t)\cos^2(t)\big) \, \mathrm{d}t & \\
= 4\big(1+\sqrt{2}\big)\pi - \frac{16}{3}\big[\cos^3(t)\big]_{t=0}^{\pi} & \\
= 4\big(1+\sqrt{2}\big)\pi + \frac{32}{3} &
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) \;=\; x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2$$

und das Ellipsoid

$$N \;:=\; \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1\big\}.$$

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f auf N ihr Minimum und ihr Maximum annimmt.

(b) Begründen Sie ohne die Methode von Lagrange, dass das Minimum der Funktionswerte Null ist, und geben Sie einen Punkt auf N an, in dem das Minimum angenommen wird.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange das Maximum von f auf N. Geben Sie einen Punkt auf N an, in dem f das Maximum annimmt.

Lösung 5

(a) Die Menge N ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. f ist stetig und nimmt daher auf der kompakten Menge N das Maximum und das Minimum an.

(b) Es gilt $f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ und $f(1, 0, 0) = 0$. Also gilt $\min\{f(x) : x \in N\} = 0$, und das Minimum wird z.B. im Punkt $(1, 0, 0)$ angenommen.

(c) Nicht verlangt: Die Voraussetzungen für die Anwendung der Methode von Lagrange sind erfüllt.

Zur Bestimmung des Maximums kann $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ vorausgesetzt werden. Denn falls eine Koordinate Null ist, nimmt f das Minimum an.

Setze $F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1)$. Methode von Lagrange: Wenn ein Extremum vorliegt, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} F &= 2x_1 x_2^2 x_3^2 + 2\lambda x_1 &&= 0 \\
\partial_{x_2} F &= 2x_2 x_1^2 x_3^2 + 4\lambda x_2 &&= 0 \\
\partial_{x_3} F &= 2x_3 x_1^2 x_2^2 + 6\lambda x_3 &&= 0 \\
\partial_{\lambda} F &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 &&= 0
\end{aligned}$$

Wegen $x_j \neq 0$ können die ersten drei Gleichungen umgeformt werden zu

$$\begin{array}{rcrcll} x_2^2 x_3^2 & + & \lambda & = & 0 & (1) \\ x_1^2 x_3^2 & + & 2\lambda & = & 0 & (2) \\ x_1^2 x_2^2 & + & 3\lambda & = & 0 & (3) \end{array}$$

$2(1) - (2) \;\Rightarrow\; 2x_2^2x_3^2 - x_1^2x_3^2 = 0 \;\overset{x_3\neq 0}{\Leftrightarrow}\; x_2^2 = \dfrac{1}{2}x_1^2$

$3(1) - (3) \;\Rightarrow\; 3x_2^2x_3^2 - x_1^2x_2^2 = 0 \;\overset{x_2\neq 0}{\Leftrightarrow}\; x_3^2 = \dfrac{1}{3}x_1^2$

In die Nebenbedingung eingesetzt:

$$x_1^2 + 2\frac{1}{2}x_1^2 + 3\frac{1}{3}x_1^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_1^2 = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x_2^2 = \frac{1}{6} \;\wedge\; x_3^2 = \frac{1}{9}.$$

In allen zugehörigen Punkten ist der Funktionswert gleich. Also ist dort der Funktionswert lokal maximal oder minimal. Die Menge N hat keinen Rand, daher gibt es kein Randmaximum.

$\Rightarrow$ das Maximum wird z.B. im Punkt $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, \frac{1}{3}\right)$ angenommen, und es gilt

$$\max\{f(x) : x \in N\} \;=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9} \;=\; \frac{1}{162}\,.$$