Gruppenübung 3

Votieraufgabe 3.1 Gegeben sei die Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = x + y + z.$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion h unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 - y^2 = 1$ und $2x + z = 1$ Extrema besitzt.

Votieraufgabe 3.2 Gegeben seien die Kugelfläche K um $M = (1, -1, 2)$ mit Radius 1 sowie die Ebenen $E : z - 2 = 0$ und $F : x - y + 2 = 0$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf dem Schnittkreis von K und E, die von der Schnittgeraden von E und F den kleinsten bzw. den größten Abstand haben und geben Sie die Abstände an.
Hinweis: Minimieren bzw. maximieren Sie das Quadrat des Abstandes.

Votieraufgabe 3.3

a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, so dass $\nabla f(x)$ und x linear abhängig sind.

   Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom Minimum und Maximum und die Lagrange-Multiplikatoren-Regel.

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema von $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = y$ unter der Nebenbedingung $y^3 - y^4 - x^2 = 0$.

Zusatzaufgabe 3.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die quadratische Form $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^\top \cdot A \cdot x$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist.

a) Zeigen Sie, dass das absolute Maximum (bzw. Minimum) von f unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ existiert und der größte (bzw. kleinste) Eigenwert von A ist.

   Hinweis: $\|x\|$ bezeichnet die euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

b) Sei $u \in \mathbb{R}^n$ eine Stelle, an der f ein absolutes Maximum unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ annimmt. Zeigen Sie, dass, falls $n > 1$ ist, $\mu = \max\{f(x) \mid \|x\| = 1 \text{ und } \langle x, u\rangle = 0\}$ existiert und ebenfalls ein Eigenwert von A ist.

c) Welche algebraische Vielfachheit muss der größte Eigenwert von A haben, dass μ gleich dem zweitgrößten Eigenwert von A ist?

Bitte wenden!

Schriftliche Aufgabe zur Abgabe am 07/08.11.2019 (am Anfang Ihrer Übungsgruppe).
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \mathrm{e}^y(y^2 - 2x^2).$$

Bestimmen Sie die absoluten Extrema von f auf der Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 6\}.$$