Gruppenübung 4

Votieraufgabe 4.1 Untersuchen Sie, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind oder nicht. Schreiben Sie für den Fall, dass sie exakt sind, die Differentialgleichungen in der äquivalenten Form

$$\partial_x \left(\phi(x, y(x))\right) = 0,$$

um, wobei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ ist.

a) $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$

b) $(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0$

c) $(2xy + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$

d) Separierbare Differentialgleichungen der Form $f(x) + g(y)y' = 0$, wobei $f, g \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Votieraufgabe 4.2

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, \qquad y(1) = 0,$$

und geben Sie das maximale Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (x + y)^2.$$

Votieraufgabe 4.3 Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$ offen. Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0 \tag{1}$$

mit $f, g \in C^1(\Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

a) Angenommen der Ausdruck

$$A(x) := \frac{1}{g(x, y)} \left((\partial_y f)(x, y) - (\partial_x g)(x, y)\right)$$

hängt nur von x ab für $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, so zeigen Sie, dass $M\colon \Omega_1 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit $M(x) := \exp(\mathcal{A}(x))$ und $\mathcal{A}\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $A\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$, ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (1) ist. Zeigen Sie genauso: Hängt

$$B(y) := \frac{1}{f(x,y)} \left((\partial_y f)(x,y) - (\partial_x g)(x,y)\right)$$

nur von y ab für $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, so ist $\tilde{M}\colon \Omega_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit $\tilde{M}(y) := \exp(-\mathcal{B}(y))$ und $\mathcal{B}\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $B\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}$, ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (1).

b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$xy^2 + y - x\,y' = 0,$$

nicht exakt ist. Bestimmen Sie trotzdem die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung mit $y(1) = 1$ und geben Sie das maximale Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

Schriftliche Aufgabe zur Abgabe am 14/15.11.2019 (am Anfang Ihrer Übungsgruppe).

a) Für welche $y_0 \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \mathrm{e}^y \sin x, \qquad y(0) = y_0,$$

"global", d.h. auf ganz $\mathbb{R}$?

b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie eine Funktion $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $y \in C^1(I \to \mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(\mathrm{e}^x \sin y - 2y \sin x) + (\mathrm{e}^x \cos y + 2\cos x)\; y' = 0,$$

ist dann, und nur dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\phi(x, y(x)) = c, \qquad x \in I,$$

existiert.