



Gruppenübung 6

Votieraufgabe 6.1 In ein Becken mit Salzwasser der Konzentration C_1 (=Salzmenge/Volumen) wird eine kleine Zelle mit Volumen V und Oberfläche F eingetaucht. Die Zelle enthält ebenfalls Salzwasser, jedoch mit geringerer Konzentration C_2 . Über die salzdurchlässige Zellwand dringt nun von außen Salz in die Zelle ein. Die Änderungsrate der Salzmenge in der Zelle kann als proportional zur Zelloberfläche und zur sich zeitlich ändernden Differenz zwischen Außen- und Innenkonzentration angenommen werden. Das Becken ist gegenüber der Zelle so groß, dass die Außenkonzentration C_1 als konstant angenommen werden kann.

Beschreiben Sie den Diffusionsprozess durch eine Differentialgleichung für die Salzkonzentration $c(t)$ in der Zelle und lösen Sie diese Differentialgleichung.

Votieraufgabe 6.2 Seien $d \in \mathbb{N}$, $B \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d})$ und $f \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Besitzt die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' = B(x)y + f(x), \quad (1)$$

genau eine beschränkte Lösung $y \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$, so hat die homogene lineare Gleichung

$$y' = B(x)y, \quad (2)$$

auch genau eine beschränkte Lösung in $C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$.

- b) Besitzt die homogene lineare Differentialgleichung (2) genau eine beschränkte Lösung $y \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$, so hat die inhomogene lineare Gleichung (1) auch genau eine beschränkte Lösung in $C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$.

Hinweis: Eine Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt falls $M > 0$ existiert, so dass $\|y(x)\| < M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Votieraufgabe 6.3

- a) Zeigen Sie, dass $y \in C^1(\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2)$ gegeben durch

$$y(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix},$$

ein Lösung des homogenen Systems

$$y' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 3 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y, \quad x > 0, \quad (3)$$

ist.

- b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems (3).
 c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$y' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 3 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

Votieraufgabe 6.4 Sei $d \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$. Ist $y \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$ eine Lösung des Systems

$$y' = Ay,$$

mit der Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$, dann gilt $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- b) Sei $B \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d})$. Ist $y \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$ eine Lösung des Systems (2) mit der Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$, dann gilt $y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schriftliche Aufgabe zur Abgabe am 28/29.11.2019 (am Anfang Ihrer Übungsgruppe).

- a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \cos(x) y = \sin(x) \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 + y_3 + 2, \\ y_2' &= y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= 4y_2 - y_3. \end{aligned}$$