# Gruppenübung 9

**Votieraufgabe 9.1** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_I \cos(x+y)\mathrm{d}(x,y), \qquad I = \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi].$

b) $\displaystyle\int_I \left(\ln(x) + y^2 \mathrm{e}^z\right) \mathrm{d}(x,y,z), \qquad I = [1,2]^3.$

**Votieraufgabe 9.2** Seien $I = [0,1]^2$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ definiert duch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

b) Zeigen Sie, dass $f$ die Bedingungen des Satzes von Fubini nicht erfüllt.

**Votieraufgabe 9.3** Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene beschränkte Intervalle und $I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F\colon I_1 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_{I_2} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

a) Zeigen Sie, dass $F$ stetig ist.

b) Beweisen Sie: Existiert die partielle Ableitung $\partial_x f \in C(I \to \mathbb{R})$, so ist $F$ differenzierbar auf $I_1^\circ$ und für $x \in I_1^\circ$ gilt

$$F'(x) = \int_{I_2} (\partial_x f)(x,y)\mathrm{d}y.$$

*Hinweis:* Der Satz von Fubini kann hilfreich sein.

**Bitte wenden!**

**Votieraufgabe 9.4** Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene beschränkte Intervalle und $I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$. Seien $f\colon I_1 \to \mathbb{R}$ und $g\colon I_2 \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = f(x)g(y)$ auch Riemann-integrierbar ist und die Indentität

$$\int_I h(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{I_1} f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{I_2} g(y)\mathrm{d}y.$$

gilt.

*Hinweis:* Die Riemann-Integrierbarkeit muss über dem Riemann-Kriterium gezeigt werden (Sie dürfen Satz 3.8 benutzen).

**Schriftliche Aufgabe zur Abgabe am 19/20.12.2019 (am Anfang Ihrer Übungsgruppe).**

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_I \frac{x^2 + \mathrm{e}^y}{z+1}\mathrm{d}(x,y,z), \qquad I = [-1,2] \times [0,1] \times [0, \mathrm{e}-1].$$

b) Seien $d \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x) + g(x)$ auch Riemann-integrierbar ist und die Identität

$$\int_I h(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x + \int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

gilt.

*Hinweis:* Die Riemann-Integrierbarkeit muss über dem Riemann-Kriterium gezeigt werden.