Gruppenübung 13

Votieraufgabe 13.1

a) Die Kurve $K \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung $(c, [0, 2\pi])$ mit

$$c(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)^\top.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K f \,\mathrm{d}s,$$

für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung $(\gamma, [0, \ln(2)])$ mit

$$\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))^\top.$$

Sei $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $v(x, y, z) = (y, -z, x)^\top$. Berechnen Sie

$$\int_C v \cdot T_g \,\mathrm{d}s.$$

Ist dieses Kurvenintegral bei dem gegebenen Vektorfeld v wegunabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Votieraufgabe 13.2 Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, und

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \wedge 0 \le x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral $\displaystyle\int_M f \,\mathrm{d}\sigma$.

Votieraufgabe 13.3 Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2uv \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von Bild(F), der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Votieraufgabe 13.4 Seien $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f_r : B \to \mathbb{R}$ über $f_r(x) = f(rx)$ für $r \in [0, 1]$. Beweisen Sie, dass

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 r^2 \int_{S^2} f_r\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r,$$

gilt, wobei $S^2 = \partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre ist.

Votieraufgabe 13.5 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ und $M \subset \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich, so dass der Rand ∂M eine glatte Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ ist, welche im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Weiter sei n ein ins Äußere von M weisenden Normaleneinheitsvektor an ∂M.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial M} f \cdot n\,\mathrm{d}s = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \mathrm{d}t$$

gilt.

b) Beweisen Sie, dass (unter den oben genannten Bedingungen) der Satz von Gauß:

$$\int_{\partial M} f \cdot n\,\mathrm{d}s = \int_M \operatorname{div}(f)(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a) und Satz 4.41 im Skript.

Schriftliche Aufgabe zur Abgabe am 23/24.01.2020 (am Anfang Ihrer Übungsgruppe).

a) Gegeben sei das Gradientenfeld $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + y^2) \\ 4xy + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Die Kurve $K_n \subset \mathbb{R}^2$ ist für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Parameterdarstellung $(\gamma_n, [0, 1])$ mit

$$\gamma_n(t) = \left(\mathrm{e}^{\sin(n\pi t)}, 1 - t^n\right)^\top.$$

Bestimmen Sie auf möglichst einfache Weise

$$\int_{K_n} w \cdot T_{g_n}\,\mathrm{d}s,$$

für $n \in \mathbb{N}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche, die durch Rotation des Graphen $\{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ um die x-Achse erzeugt wird. Zeigen Sie, dass ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$|\mathcal{F}| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$