Gruppenübung 14

Votieraufgabe 14.1 Es sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v \colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \frac{x^2}{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\partial G} v \cdot T_g \, \mathrm{d}s,$$

wobei ∂G im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Votieraufgabe 14.2 Sei $r > 0$. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der Schnitt der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und der Ebene $x + y + z = 0$. Weiter sei das Vektorfeld $v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $v(x,y,z) = (y,z,x)^\top$. Berechnen Sie, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes, das Wegintegral

$$\int_K v \cdot T_g \, \mathrm{d}s,$$

wobei beim Durchlaufen der Kurve K, wenn man in Richtung des Normalenvektors $(1,1,1)$ auf der Kurve steht, der Ursprung links liegt.

Voraussetzungen der Aufgaben 14.3, 14.4 und 14.6 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein abgeschlossener Standardbereich, so dass für die Projektion in x_1-Richtung

$$M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2,x_3) \in M_1 \wedge u_1(x_2,x_3) \leq x_1 \leq o_1(x_2,x_3)\},$$

gilt, wobei $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ ein Standardbereich ist, der die Voraussetzungen von 4.41 im Skript erfüllt, und $u_1, o_1 \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ mit $u_1(x) \leq o_1(x)$ für $x \in M_1$. Entsprechendes gelte für die Projektionen in x_2- und x_3-Richtung. Weiter sei n der ins Äußere von M weisenden Normaleneinheitsvektor an ∂M.

Votieraufgabe 14.3 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\overline{M} \subset D$. Seien $f, g \in C^2(D \to \mathbb{R})$ und $v \in C^1(D \to \mathbb{R}^3)$.

a) Beweisen Sie die Regel der dreidimensionalen partiellen Integration:

$$\int_M f(x)\ (\nabla \cdot v)(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial M} \langle fv, n \rangle \, \mathrm{d}\sigma - \int_M \langle \nabla f(x), v(x) \rangle \, \mathrm{d}x.$$

b) Beweisen Sie die Greenschen Formeln:

$$\int_M f(x)\,\Delta g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_M \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle\,\mathrm{d}x + \int_{\partial M} \langle f\,\nabla g, n\rangle\,\mathrm{d}\sigma,$$
$$\int_M f(x)\,\Delta g(x)\,\mathrm{d}x = \int_M g(x)\,\Delta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial M} \langle f\,\nabla g - g\,\nabla f, n\rangle\,\mathrm{d}\sigma.$$

Bemerkung: Die Regel der partiellen Integration und die Greenschen Formeln gelten allgemeiner für beschränkte, stückweise C^1-berandete Gebiete im $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Votieraufgabe 14.4 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\overline{M} \subset D$.

a) Sei $v \in C^2(D \to \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial M} \operatorname{rot}(v) \cdot n\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

b) Sei $v \in C^1(D \to \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie: Sind $u_1, o_1 \in C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ mit $u_1(x) = o_1(x)$ für $x \in \partial M_1$, dann gilt

$$\int_{\partial M} \operatorname{rot}(v) \cdot n\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Zusatzaufgabe 14.5 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v \in C^1(U \to \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie, dass dann für alle $x \in U$

$$(\nabla \cdot v)(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} v \cdot n_x\,\mathrm{d}\sigma,$$

gilt, wobei $B_r(x)$ die Kugel mit Radius r um den Punkt $x \in U$ und n_x der ins Äußere von $B_r(x)$ weisenden Normaleneinheitsvektor an $\partial B_r(x)$ ist.

Zusatzaufgabe 14.6 Sei $0 \in M^\circ$. Weiter sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial M} f \cdot n\,\mathrm{d}\sigma.$$

Hinweis: Sie dürfen dabei die Verallgemeinerung des Satzes von Gauß für Greensche Bereiche im $\mathbb{R}^3$ benutzen.