Vortragsübung 1

Aufgabe 1 Wir betrachten die Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^3 - 2xy = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass es Intervalle U um $x_* = 1$ und V um $y_* = 1$ und eine differenzierbare Funktion $f\colon U \to V$ gibt mit $f(1) = 1$ und

$$\{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset C.$$

b) Folgt mit dem Satz über implizite Funktionen auch die Existenz von Intervallen $\tilde{V}$ um $y_* = 1$ und $\tilde{U}$ um $x_* = 1$ und einer differenzierbaren Funktion $h\colon \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit

$$\{(h(y), y) \mid y \in \tilde{V}\} \subset C\ ?$$

Aufgabe 2 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{y^2 \sin(x)} + x^6 y^2 - 3yt - 4 &= 0, \\ x^2 + y^2 t - 1 &= 0, \end{aligned}$$

mit einer Lösung $(t_0, x_0, y_0) = (1, 0, -1)$.

a) Zeigen Sie, dass das System sich in einer Umgebung des Punktes (t_0, x_0, y_0) lokal nach x und y auflösen lässt.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen $x'(t_0)$ und $y'(t_0)$ der auflösenden Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

Aufgabe 3 Eine positive Zahl a soll so in drei positive Summanden x, y, z zerlegt werden, dass der Ausdruck

$$x^n y^m z^l$$

zu gegebenem $n, m, l \in \mathbb{N}$ maximal wird. Überlegen Sie, warum dieses Problem eine eindeutige Lösung (x, y, z) mit $x, y, z > 0$ besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 4 Gegeben sei die Kreisscheibe K in $\mathbb{R}^3$, die sich als Schnittmenge der Ebene $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ und der Kugel $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 24\}$ ergibt. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = xy + 2z$$

ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum auf K annimmt und diese Extremwerte auf dem Rand von K angenommen werden. Berechen Sie außerdem den minimalen und maximalen Wert von f auf K.