Vortragsübung 3

Aufgabe 1
Gegeben ist das Anfaangswertproblem

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie analog zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf eine äquivalente Integralgleichung und lösen Sie diese durch Iteration, ausgehend von $y_1(x) = 1$.

Aufgabe 2
Gegeben sind das Anfangswertproblem

$$x^2 y' \;=\; y + 1, \quad y(0) = -1$$

und die Funktionenschar

$$y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0, \\ c\,\mathrm{e}^{-1/x} - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $y_c \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt und dass $y = y_c$ Lösung des Anfangswertproblems ist. Warum ist hier der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

Aufgabe 3
Gegeben ist die lineare Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' - y' - 3y \;=\; 0$$

für die Unbekannte $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein äquivalentes System erster Ordnung um.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der oben angegebenen Differentialgleichung (vgl. schriftliche Aufgabe auf Blatt 5.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \cdot y_2 \\ y_2' &= -\frac{2x}{1+x^2} y_2 \end{aligned}$$