Vortragsübung 9

Auf die folgenden Fragen bzw. Aufgaben wird in der Vortragsübung eingegangen:

- Es wäre schön, wenn Sie nochmal erklären könnten, wie man Aufgaben bearbeitet, in denen die Koordinatentransformation bereits vorgegeben ist. (Siehe Aufgabe 1).
- Bei der Definition der Fläche (4.32) wird für eine P-Darstellung (f, M) gefordert, dass f eingeschränkt auf M injektiv ist. Ist es auch möglich, analog zu geschlossenen Kurven, so etwas wie geschlossene Flächen zu definieren, indem man etwa fordert, dass f eingeschränkt auf M° injektiv ist? Dies würde z.B. die Parametrisierung der Oberfläche von Rotationskörpern vereinfachen. (Siehe Aufgabe 2).
- Woher kommen die Definitionen von div(f) und rot(f) in 4.22? Warum wurde es gerade so definiert? Gibt es eine anschauliche Herleitung?

Aufgabe 1
Für festes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sei die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + 4y^2 \leq 16 \ \wedge \ 2y \geq \sin(\alpha)\sqrt{x^2 + 4y^2}\}$$

und die injektive Abbildung

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\to \ \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \mapsto (2r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

gegeben (die Injektivität muss nicht nachgwiesen werden).

a) Bestimmen Sie $M := g^{-1}(A)$.

b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Transformationssatzes erfüllt sind.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_A yx^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

Aufgabe 2
Sei F die obere Hälfte ($x_3 \geq 0$) der Einheitsspäre im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

$$\int_F (\nabla \times f) \cdot n \,\mathrm{d}\sigma$$

für $f(x, y, z) = (1, xz, xy)^T$:

a) Direkt über die Definition des Flächenintegrals,

b) Mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Bitte wenden

Aufgabe 3
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$ mit

$$\Delta f(x) \;:=\; (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) f(x) \;=\; 0 \quad \text{für } x \in D.$$

f heißt dann harmonisch. Sei weiter $M \subseteq D$, so dass der Integralsatz von Gauß in M angewandt werden kann. Beweisen Sie, dass

$$\int_{\partial M} (\nabla f) \cdot n \,\mathrm{d}\sigma \;=\; 0$$

gilt.