PD Dr. Peter H. Lesky
Dr. Max Heß
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Zeitraum: 20. - 24. April 2020**

Höhere Analysis SS 2020 — Blatt 1

Alle Aufgaben sind bis Donnerstag, 23.4.2020, 24:00 Uhr schriftlich abzugeben.
Für die Lösung von Aufgabe 1.1 erhalten Sie bis zu 4 Punkte.
Für korrekte Lösungen der Aufgaben 1.2, 1.3 und 1.4 wird jeweils ein Votierpunkt vergeben.

1.1. In der Vorlesung wurden die Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktion mit Hilfe von Reihen definiert. Konkret ist

$$\mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}, \qquad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}.$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$,
(b) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$.

Verwenden Sie diese beiden Ausdrücke, um zu zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ auch

(c) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \cdot (\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Im} z))$,
(d) $\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$ bzw. $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$,
(e) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass

(f) Kosinus und Sinus nur reelle Nullstellen haben und
(g) $\lim_{y\to\pm\infty} |\cos(x + \mathrm{i}y)| = \infty$, bzw. $\lim_{y\to\pm\infty} |\sin(x + \mathrm{i}y)| = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.2. Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind in $z = 0$ differenzierbar?

(a) $z \mapsto \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, **(b)** $z \mapsto \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$, **(c)** $z \mapsto \overline{z}$, **(d)** $z \mapsto z\overline{z}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung nur die Definition der Differenzierbarkeit.

1.3. Beweisen Sie die Kettenregel:
Solange $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $z \in D$ ist und $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z) \in D_h$, gilt

$$(h \circ f)'(z) = h'\big(f(z)\big) \cdot f'(z)\,.$$

1.4. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(a) $$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z \qquad \text{für } \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \text{ mit } 0 \le t \le \pi\,,$$

(b) $$\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{für } \gamma = [0, 1 + \mathrm{e}]\,.$$