Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 03

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Mengenbildung)

a) Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, \{a\}, \{3, 4, 5\}\}$. Welche der folgenden Objekte sind Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$?

$$1, \quad 3, \quad a, \quad \{a\}, \quad \{1\}, \quad \{\{3,4\}\}, \quad \{2,5\}, \quad \{\{a\},\{3,4,5\}\}, \quad \{\{a\},\{3,4,5\},3\}.$$

b) Die Mengen A, B, C seien Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Die Bedingungen einer Teilaufgabe an die Mengen gelten auch für alle späteren Teilaufgaben.

i) $A \cap B = \emptyset$ und für alle $n \in A \cup B$ gilt $n \leq 10$. Wieviele Elemente kann A maximal haben?

ii) Alle $n \in C$ erfüllen $n \geq 5$ und die Anzahl von $A \cap C$ sei gleich der Anzahl von $B \cap C$. Wieviele Elemente kann $A \cap C$ maximal haben?

iii) Seien $A = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ und $C = \{5, 6\}$. Bestimmen Sie die Menge $M_B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die alle noch möglichen Mengen B enthält.

iv) Wählen Sie ein $B \in M_B$. Bestimmen Sie für diese Wahl die Menge $B \times C$.

Aufgabe 2 (Mengen, Funktionen)
Zeigen Sie für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und Teilmengen $C, C_1, C_2 \subseteq A$ bzw. $D \subseteq B$:

i) $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$. Geben Sie ein Beispiel an für $f(C_1 \cap C_2) \neq f(C_1) \cap f(C_2)$.

ii) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. Geben Sie ein Beispiel an für $C \neq f^{-1}(f(C))$.

iii) $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$. Geben Sie ein Beispiel an für $f(f^{-1}(D)) \neq D$.

Aufgabe 3 (Ringe, Körper)
Sei R ein Ring und K ein Körper. Zeigen Sie, dass gilt:

i) (Satz 3.3 (iii)) $\forall x, y \in R: \ (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

ii) (Satz 3.5 (ii)) $\forall a \in K \ \forall \, b, c, d \in K \backslash \{0\} : \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

iii) (Satz 3.5 (iii)) $\forall a, c \in K \ \forall \, b, d \in K \backslash \{0\} : \dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\, d \pm b\, c}{b \cdot d}$.

Aufgabe 4 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) (Mengengleichheit)
Seien L, M und N drei Mengen. Zeigen Sie durch logisches Schließen, dass

$$L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$$

gilt.

b) (Ringe & Körper)
Sei R ein Ring. Beweisen Sie

$$[\text{Satz 3.3 (iv)}] \quad \forall x, y, z \in R: \ (-x) \cdot (y - z) = -x \cdot y + x \cdot z.$$

Sie können im Beweis eines der Gesetze aus Aufgabe 3 verwenden.