Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 04

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (vollständige Induktion)

(i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$

$$\text{[Satz 3.10 (i)]} \quad \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}: \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

(ii) Beweisen Sie unter Verwendung von (i):

$$\text{[Satz 3.10 (ii)]} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: \ a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, b^{n-1-k}.$$

Aufgabe 2 (Ordnungsaxiome, Beweise)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Ordnungsaxiome die folgenden Ungleichungen:

(i) $0 \leq a < b \implies a^2 < b^2$,

(ii) $b \geq 0 \wedge a^2 < b^2 \implies a < b$,

(iii) $a < b \wedge c < 0 \implies ac > bc$,

(iv) $0 < a < b \implies 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,

(v) $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$,

Geben Sie jeweils die verwendeten Axiome an.

Aufgabe 3 (Ungleichungen)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in $\mathbb{R}$) der folgenden Ungleichung:

$$\frac{10}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1 \ .$$

b) Skizzieren Sie die folgende Menge:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| \leq |x-y|\right\} ,$$

Aufgabe 4 (vollständige Induktion, Ungleichungen)
Zeigen Sie für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \ \geq \ 1 + n \cdot x.$$

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b) (Ungleichungen)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden, reellen Ungleichung:

$$\frac{1}{|x-2|} \ > \ \frac{1}{1+|x-1|}$$