Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 05

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzen und bestimmen Sie es gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $M_1 := \{(1 - \frac{1}{n^2})^n |\ n \in \mathbb{N}\}$,

(ii) $M_2 := \{(1 + \frac{1}{n})^{n^2} |\ n \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis: Die Bernoulli-Ungleichung (BU) (Blatt 4, Aufgabe 4): $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$ darf ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 2 (Vollständige Induktion-Kombinatorik)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n : \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Hinweis: Satz 3.24.

Aufgabe 3 (Primzahlen-Teilbarkeit)

(i) Zeigen Sie mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises die Gültigkeit folgender Aussage: “Ist p eine Primzahl, so ist $\sqrt{p}$ eine irrationale Zahl.”
Hinweis: der Fundamentalsatz der Arithmetik / Satz 3.30.

(ii) Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie:

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < m < p : p \mid \binom{p}{m}.$$

Aufgabe 4 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)
Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}.$$

(i) Weisen Sie nach, dass f injektiv ist.

(ii) Bestimmen Sie den genauen Wertebereich $I = f(\mathbb{R}_0^+)$ und, da f als Funktion $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow I$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

(iii) Weisen Sie nach, dass g weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

1. Untersuchen Sie, ob die folgende Menge ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzt und bestimmen Sie es gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$M := \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

2. Beweisen Sie dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gillt:

$$(n \text{ gerade} \vee m \text{ gerade}) \Longleftrightarrow m \cdot n \text{ gerade}.$$