



## Gruppenübung 06

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

### Aufgabe 1 (Polynome)

a) Betrachten Sie die rationale Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie mithilfe von Polynomdivision ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  so, dass die Einschränkung

$$f|_I : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

eine bijektive Abbildung ist.

b) Gegeben seien die beiden Polynome

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \quad q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1.$$

Bestimmen Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler dieser Polynome.

### Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$i) \quad z_1 = \overline{(3 + 2i)}(2 - i)^2(1 - i)^2, \quad ii) \quad z_2 = \frac{2 + i}{3 - i} + \left(\frac{5 + 2i}{3i}\right)^{-1}.$$

### Aufgabe 3 (Wahr oder Falsch)

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an und begründen Sie Ihre Auswahl.  
Es ist möglich, dass in einer Teilaufgabe keine oder mehrere Aussagen richtig sind.

a) Der Realteil einer komplexen Zahl

- ist reell                       ist imaginär  
 kann negativ sein             ist nie gleich Null

b) Der Imaginärteil einer komplexen Zahl

- ist imaginär       kann negativ sein       ist reell

c) Der Betrag einer komplexen Zahl

- ist reell                               hat einen Imaginärteil ungleich Null  
 ist größer oder gleich Null       ist eindeutig bestimmt

d) Der Imaginärteil einer reellen Zahl

- ist gleich Null                       existiert nicht

e) Der Betrag einer reellen Zahl

- ist die reelle Zahl selber             ist größer oder gleich Null

f) Der Imaginärteil einer imaginären Zahl

- ist die imaginäre Zahl selber       ist die imaginäre Zahl geteilt durch  $i$

**Hinweis:** Eine imaginäre Zahl  $z$  ist eine komplexe Zahl mit  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

g) Der Betrag einer imaginären Zahl

- ist gleich Null                       existiert nicht

h) Das Argument einer komplexen Zahl

- ist reell                               hat einen Imaginärteil ungleich Null  
 ist größer oder gleich Null       ist eindeutig bestimmt

### Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{C}$ :

- i)  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z + i) < 4 + 3 \operatorname{Re} z \wedge |z + i - 1| \geq 1\}$   
ii)  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^2 = 0\}$   
iii)  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2 \wedge \frac{2}{3}\pi < \arg(ze^{-i\frac{\pi}{4}}) < \frac{3}{4}\pi\}$

**Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte ]**

a) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen des Polynoms  $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 61x + 28$ .

**Hinweis:** Das Polynom besitzt mindestens eine rationale Nullstelle.

b) Stellen Sie die komplexe Zahl  $\frac{2+i}{1-i}$  in der Form  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  dar.