



Gruppenübung 07

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (komplexe Zahlen)

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von $(1 - \sqrt{3}i)^{2017}$.
- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in Polar-Koordinaten, d.h. in der Form $z = re^{i\varphi}$, $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in kartesischen Koordinaten an, d.h. in der Form $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (komplexe Zahlen)

- a) Bestimmen Sie alle Nullstellen in \mathbb{C} des Polynoms $p(x) = x^3 - x^2 + 2$ und stellen Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten dar.

Hinweis: das Polynom p besitzt eine Nullstelle in \mathbb{Q} .

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$q(z) = z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 22z + 12,$$

in kartesischen Koordinaten. Geben Sie außerdem die zugehörige Darstellung von q als Produkt von linearen reellen und quadratischen reellen Polynomen ohne reelle Nullstellen an.

Hinweis: $1 + i$ ist eine Nullstelle von q .

Aufgabe 3 (komplexe Zahlen)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichung

$$\bar{z}^4 - (1 - i)\bar{z}^2 - i = 0$$

in kartesischen Koordinaten.

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$4z^3 = \bar{z},$$

in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 4 (Gleichungssystem)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\x_1 + (\alpha - 1)x_2 + (\beta + 2)x_3 &= 3\end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von den Werten der Parameter α und β , ob das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt, und bestimmen Sie alle Lösungen (in Abhängigkeit von α und β).

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 8 = 0.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

- b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + tx_3 &= 1 \\-x_1 + x_2 &= 0 \\3x_1 - tx_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, für welche Werte von t das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, für welche Werte von t das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt und für welche Werte von t das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Bestimmen Sie außerdem alle Lösungen (in Abhängigkeit von t).