Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 08

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Geraden, Ebenen)

Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ der Punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$.

a) Geben Sie eine Parameterform und die Hessesche Normalform der Ebene E an, in welcher g und P liegen.

b) Gegeben sei die Ebene $\tilde{E}: x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 1$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von $\tilde{E}$.

c) Bestimmen Sie die Schnittmenge $g \cap \tilde{E}$.

d) Sei $\tilde{g} = g + \begin{pmatrix} e \\ 42 \\ -\pi \end{pmatrix} = \{x + \begin{pmatrix} e \\ 42 \\ -\pi \end{pmatrix} \mid x \in g\}$. Bestimmen Sie die Schnittmenge $\tilde{g} \cap \tilde{E}$.

Aufgabe 2 (Geraden und Ebenen, Schnitte)

a) Gegeben seien die Geraden

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, welche die Gerade g enthält und parallel zu h ist. Bestimmen Sie außerdem die Hessesche Normalform von E.

b) Gegeben seien die Ebenen

$$F : 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 35\,.$$

Weisen Sie nach, dass sich die Ebenen E und F schneiden, und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F.

Aufgabe 3 (Euklidisches Skalarprodukt, Orthogonalität)
Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $||a|| = ||b|| = 1$ und $\angle(a, b) = 60°$.

a) Welchen Winkel schließen die Vektoren $a + b$ und $2b - a$ ein?

b) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren $a + b$ und $2b + \lambda a$ senkrecht aufeinander?

c) Nehmen Sie an $n = 3$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von a, b aufgespannten Parallelogramms P.

Aufgabe 4 (Untervektorräume, affine Räume)
Welche der folgenden Mengen M_i sind Untervektorräume, bzw. affine Unterräume des jeweiligen V_i? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 0\},\ V_1 = \mathbb{R}^3,$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\},\ V_2 = \mathbb{R}^3,$

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\},\ V_3 = \mathbb{R}^3,$

d) $M_4 = \{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},\ V_4 = \mathbb{R}^3,$

e) $M_5 = M_1 \cap M_2,\ V_5 = \mathbb{R}^3,$

f) $M_6 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^n x_i = 0\},\ V_6 = \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Geben Sie bei den Teilaufgaben a) bis e) jeweils an, ob es sich um eine Gerade oder um eine Ebene handelt.

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]
Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den positiv orientierten Innenwinkel bei A, die Seitenlängen sowie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C.

b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der A, B und C enthaltenden Ebene E. Ist die Ebene E ein Untervektorraum oder ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$?