



Gruppenübung 09

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Linearkombination, linear unabhängig)

a) Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

linear abhängig?

c) Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Ist das Tripel

$$x = a + b - 2c, y = -a + c, z = 2b - 2c$$

linear unabhängig? Und ist $\{x, y, c\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 2 (Linear unabhängige Menge)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ von paarweise linear unabhängigen Vektoren ist linear unabhängig.
- Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.

Hinweis: Die Falschheit einer Aussage kann man in vielen Fällen durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

Aufgabe 3 (Basis)

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

a) Die lineare Hülle in \mathbb{R}^3 von

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Z + iW = 0 \right\}$ als Vektorraum über \mathbb{C} .

c) $\left\{ \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Z + iW = 0 \right\}$ als Vektorraum über \mathbb{R} .

Ergänzen Sie außerdem Ihre Basisvektoren von $\text{Span}(M)$ zu einer Basis des \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 4 (Vektorraum der reellen Polynome)

Es bezeichne P_3 den Vektorraum der reellen Polynome bis zum Grad 3.

- a) Seien $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie dass $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ eine Basis von P_3 bildet. Welche Dimension hat dieser Raum?
- b) Seien $g_k(x) = (x + 1)^k, k = 0, 1, 2, 3$. Stellen Sie das Polynom $q(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ als Linearkombination der Vektoren $g_k, k = 0, 1, 2, 3$ dar.
- c) Beweisen Sie dass $W = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ein Unterraum von P_3 ist. Bestimmen Sie eine Basis von W .

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

- a) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 . Bestimmen Sie außerdem ein Erzeugendensystem von E , das keine Basis von E ist.
- b) Sei $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ so dass $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ und $\text{Span}\{v_1, v_3\}$ verschiedene Ebenen sind. Beweisen Sie dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.