Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc., M.Sc., Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 10

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Folgen und Konvergenz)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = \frac{n^2-1}{\sqrt{n}(n^2+1)}, \qquad b)\quad a_n = \frac{3n^2-4n+(-1)^n}{(2n-\sqrt{n})^3-4} + i\left(\frac{2n^4-n^3}{1+n^4}+\frac{n-2}{n+4}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$c)\quad a_n = \frac{n^2}{2^n}, \qquad d)\quad a_n = (-1)^n\frac{1}{n} + i\cdot n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$e)\quad a_n = \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n, \qquad f)\quad a_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+3},$$

Aufgabe 2 (Häufungspunkte, limes superior, limes inferior)
Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen und, falls existent, den Limes superior und Limes inferior:

$$a)\quad a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{1}{n}, \qquad b)\quad a_n = i^n.$$

Aufgabe 3 (Rekursive Folgen)
Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien wie folgt rekursiv definiert:

$$a)\qquad x_1 = 7, \qquad x_{n+1} = \sqrt{7+2x_n} \qquad \text{für } n \geq 1,$$

$$b)\qquad y_1 = 1, \qquad y_{n+1} = \frac{n^2+4n+1}{n^3+8}y_n \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4 (Beweisaufgabe)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Folgen. Beweisen Sie: Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ die Ungleichung $|c_n| \leq |a_n| \cdot |b_n|$ gilt und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

i) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+4n^2+5n}, \qquad b)\quad a_n = \frac{2n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)^2}, \qquad c)\quad a_n = \frac{7n-\sqrt{n^3}}{n+\sqrt{n}},$$

$$d)\quad a_n = (-1)^n + \frac{n}{2+n^3}, \qquad e)\quad a_n = \frac{2^n+3^n}{3^n+n^5}, \qquad f)\quad a_n = n(\sqrt{n^4+8n}-\sqrt{n^4+5}),$$

$$g)\quad a_n = 1 + \left(\frac{1}{1000}\right)^n, \qquad h)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^n.$$

ii) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad b_n = \frac{n}{n+1}\left((-1)^n+1\right).$$