Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc., M.Sc., Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 11

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, 2^{-n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$

Konvergiert die Reihe im Aufgabenteil d) absolut?

Aufgabe 2 (Konvergenz von Reihen)
Untersuchen Sie jeweils die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$

b) $a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \text{falls } k \leq 2017, \\ 2^{-k}, & \text{falls } k > 2017. \end{cases}$

c) $a_k = \dfrac{1}{\sqrt[k]{k!}}$, falls $k \geq 1$.

Aufgabe 3 (Wahr-Falsch-Aufgabe)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort. Die Falschheit einer Aussage kann man durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n \neq 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

c) Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

d) Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

e) Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

f) Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Aufgabe 4 (Abschätzung)
Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\,3^k}$$

Ihren Wert bezeichnen wir mit s, die n-te Partialsumme mit s_n. Geben Sie ein N an, so dass $|s_N - s| < \frac{1}{2}10^{-6}$ gilt.

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

i) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k + 5}{4^k}.$$

ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$