



Gruppenübung 12

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Grenzwert)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{(\sin(2x))^2}$$

b) Sei $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{1+2x}$. Zeigen Sie mit dem ϵ - δ -Argument, dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} a + 3 & \text{für } x = -2 \\ x^2 + 2x - b & \text{für } x \in] - \infty, -2[\cup] - 2, -1] \\ c & \text{für } x \in] - 1, 0[\\ \frac{x^2 - d}{x^3 + 2} & \text{für } x \in [0, 2[\\ \frac{1}{5} & \text{für } x \in [2, +\infty[\end{cases} .$$

Bestimmen Sie die Parameter, so dass die Funktion f auf $] - \infty, +\infty[$ stetig ist.

Aufgabe 3 (Stetige Fortsetzung)

Untersuchen sie, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6} + \frac{(2x - 6)^2}{x^2 - 6x + 9}$$

nicht definiert ist, man f durch Zuweisung reeller Funktionswerte stetig fortsetzen kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Funktionswerte.

Aufgabe 4 (Zwischenwertsatz und Intervallhalbierungsverfahren)

- (a) Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie: es gibt $\xi \in [0, 1]$, so dass $f(\xi) = f(\xi + 1)$.
- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[1, 2]$ genau eine Nullstelle besitzt. Benutzen Sie das Intervallhalbierungsverfahren, um ein Intervall von kleinerer Länge als $\epsilon = 0.25$ zu finden, das diese Nullstelle von f enthält.

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

- a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ und es sei $f(x) > 0$. Beweisen Sie dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt mit $x \in I$, so dass $f(y) > 0$ für alle $y \in I$.