Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc., M.Sc., Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 13

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Differentiation)

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{R} \to]1, \infty[\,,\ f_1(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{1+x^2} + 3\cos^2 x + \ln(2\sqrt[8]{x})}$

ii) $f_2 :]-2, \infty[\to \mathbb{R}\,,\ f_2(x) = \frac{(2-x)\,e^x}{2+x} + \frac{(2-\cos x)\,e^{\cos x}}{2+\cos x}$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen die Ableitung von $g(x) = \arccos(x)$.

Aufgabe 2 (Leibnizregel, Differenzierbarkeit)

a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar und $n \in \mathbb{N}$. Drücken Sie $h^{(n)}(x)$ für $h(x) = xg(x)$ unter Verwendung der Leibnizregel und Ableitungen von g aus.

b) Sei I das größtmögliche Intervall mit $1 \in \mathrm{I}$, auf dem

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

differenzierbar ist. Geben Sie I an.

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit)
Beantworten Sie die folgende Frage für m gleich $0, 1, 2$ und 3. Gegeben sei eine Funktion $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei weiter $g_k(x) = x^k g_0(x)$. Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ ist $g_k \in C^m(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen und bestimmen Sie deren Definitionsbereiche:

   i) $f_1 : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = (\cos(2x))e^{\sin(x)} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4}\right)$

   ii) $f_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{3x^2-5}{2x}\right)\right)$

b) i) Berechnen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen den Wert für $(f^{-1})'(f(1))$ für die Funktion $f(x) = x + x^3$.

   ii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g in $(\sqrt{3}, g(\sqrt{3}))$.