Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc., M.Sc., Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 14

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Grenzwerte, Regel von de l'Hospital)
Bestimmen Sie die Grenzwerte

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(x)-\sin(2x)}{2e^x-2-2x-x^2}$,

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Aufgabe 2 (Wahr oder falsch?)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort. Die Falschheit einer Aussage kann man durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade, d.h. es gilt $f(x) = f(-x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann nimmt f ein lokales Minimum oder Maximum an.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade. Dann nimmt f ein globales Minimum oder Maximum an.

c) Jede beschränkte differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt ein lokales Minimum oder Maximum an.

d) Jede beschränkte differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat einen Wendepunkt.

Aufgabe 3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz von Rolle)

a) Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty[$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : \; x \mapsto \ln(x) + 2 - x$$

mindestens zwei Nullstellen besitzt, und mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 4 (Regel von de l'Hospital, verallgemeinerter Mittelwertsatz)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Darf man die Regel von de l'Hospital anwenden und folgern, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1}$$

gelten müsste und daher $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert?

b) Berechnen Sie mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung den Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x^\beta - x_0^\beta}$$

für $x_0 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) Berechnen Sie die Grenzwerte

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{8x}$,

   ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$.

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

   i) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f.

   ii) Untersuchen Sie f auf D auf Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte.

   iii) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.