



Gruppenübung 15

Die schriftliche Aufgabe sollte bei dem Gruppenleiter abgegeben werden. Alle anderen Aufgaben sind Votieraufgaben, die in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1 (Taylorentwicklung)

a. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\sqrt[3]{1+2x}$.

i. Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

ii. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_2(f, x, 0)$ und $T_1(f, x, \frac{7}{2})$.

iii. Bestimmen Sie mit welcher Genauigkeit das Taylorpolynom $T_1(f, x, \frac{7}{2})$ die Funktion f im Intervall $[3, 4]$ approximiert durch das Restglied

$$\sup_{x \in [3, 4]} |f(x) - T_1(f, x, \frac{7}{2})|,$$

abzuschätzen.

b. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $g(x) = e^{x^2}$ um $x_0 = 0$ und ermitteln Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz und die Taylorreihe von $h(x) = e^x$.

Aufgabe 2 (Konvergenzradius)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 4n^3}{n^3 + n^2} x^n$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} x^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} (4 + (-1)^n)^{-3n} x^{5n}$

Aufgabe 3 (Potenzreihen)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^{n+1} - 2^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$ c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n(n+1)^2\sqrt{n+3}}$

Aufgabe 4 [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

a. Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

b. Sei $f(x) = \ln(\sin(x))$. Man kann $\ln(\sin(1.5))$ approximieren mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$. Bestimmen Sie $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$ und berechnen Sie den Fehler $|\ln(\sin(1.5)) - T_4(f, 1.5, \frac{\pi}{2})|$ mit einem Rechner. Runden Sie auf zehn Nachkommastellen.