



Vortragsübung 3

Aufgabe 1 *vollständige Induktion*

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$7^n - 1 \text{ ist durch 6 teilbar für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Was halten Sie von folgendem Beweis? Wo genau steckt der Fehler?

Aussage: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Induktionsanfang: $1 = 1$, 1 ist zu sich selber gleich: Richtig!

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte

$$1 = 2 = 3 = \dots = n \quad (*)$$

Induktionsbehauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 = 2 = 3 = \dots = n = n + 1$

Induktionsschritt:

Durch Addition von 1 ergibt sich:

$$(*) \iff 2 = 3 = 4 = \dots = n = n + 1. \quad (**)$$

Aus (*) folgt außerdem:

$$1 = 2. \quad (***)$$

Aus (**) und (***) folgt

$$1 = 2 = 3 = 4 = \dots = n = n + 1.$$

□

Aufgabe 2 *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden reellen Ungleichung:

$$\frac{1}{1 - |x - 2|} < 3, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

Aufgabe 3 *Ordnungsaxiome*

Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Ordnungsaxiome die folgenden Ungleichungen:

a) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$,

b) $1 > 0$,

c) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$,

d) $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$.

Geben Sie jeweils die verwendeten Axiome an.