Vortragsübung 4

Aufgabe 1 *Supremum, Infimum, Maximum, Minimum*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzen und bestimmen Sie es gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $A = (-1, 2] \cup [5, \infty)$,

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$, (ist $\sup C \in \mathbb{Q}$?),

d) $D = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 2 *Binomialkoeffizienten*
Zeigen Sie die Pascalsche Regel:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Aufgabe 3 *Teilbarkeit, Äquivalenzrelationen*

a) Weisen Sie nach, dass

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \text{ ist ein Vielfaches von } 7,$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

b) Weisen Sie nach, dass

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} a \text{ teilt } b,$$

<u>keine</u> Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 4 *Injektivität, Surjektivität, Bijektivität*

a) Sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann folgende Eigenschaften äquivalent sind:

   (i) f ist injektiv,

   (ii) f ist surjektiv,

   (iii) f ist bijektiv.

b) Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

   (i) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$,

   (ii) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$,

   (iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$.