Vortragsübung 7

Aufgabe 1 *Orthogonalität von Vektoren*

a) Bestimmen Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, der auf den Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

b) Bestimmen Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit Betrag 1, der auf den Vektoren A und B senkrecht steht.

c) Bestimmen Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, der auf dem Vektor

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.

d) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren

$$D = \begin{pmatrix} -4 - 3\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander?

Aufgabe 2 *Ebenen: Parameterdarstellung, Hessesche Normalform*

a) Die Punkte $A = (1, 0, 4)$, $B = (2, 2, 2)$, und $C = (1, -1, 0)$ definieren eine Ebene E_1 in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform der Ebene E_1.

b) Gegeben seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$ und die Gerade

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_2, welche den Punkt P enthält und senkrecht zur Geraden g ist.
(Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn ein Richtungsvektor der Geraden parallel zu einem Normalenvektor der Ebene liegt).

Aufgabe 3 *Abstand eines Punktes von einer Ebene*
Gegeben sei die Ebene $E : -x_2 + 2x_3 = 2x_1 - 9$.

a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs O von der Ebene E.
(Der Abstand eines Punktes R zu einer Ebene F ist gegeben durch $\min(d(R, S) \mid S \in F)$).

c) Bestimmen sie den Abstand des Punktes $P = (0, -1, 4)$ von der Ebene E, sowie den Punkt Q auf E, mit minimalem Abstand zum Punkt P.

Aufgabe 4 *Schnitt zweier Ebenen: Schnittwinkel und Schnittgerade*
Gegeben seien die Ebenen

$$E : -x + 2y + 2z = 0 \quad \text{und} \quad F : x + y + 4z = 3.$$

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene F.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel und die Schnittgerade der Ebenen E und F.
(Der *Schnittwinkel* zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ist gegeben durch $\min(\measuredangle(n_1, n_2), \pi - \measuredangle(n_1, n_2))$, wobei n_i der Normalenvektor zur Ebene E_i ist, $i = 1, 2$.)

Aufgabe 5 *Untervektorräume*
Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind:

i) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

ii) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

iii) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.