Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 8

Aufgabe 1 *Untervektorräume*

a) Untersuchen Sie, ob durch die folgenden Einschränkungen Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums P_n der Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ vom Grad $\leq n$, mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, definiert werden:

   i) Grad $p = n$
   ii) $a_k \in \mathbb{Z}$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$
   iii) p ist gerade

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   i) $U \cap V$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.
   ii) $U \cup V$ ist genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$.

Aufgabe 2 *Lineare Unabhängigkeit*
Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Stellen Sie den Vektor $(1, 2, 3)^t$ für $\alpha = 0$ als Linearkombination bezüglich dieser Basis dar.

Aufgabe 3 *Basis, Dimension*

a) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des folgenden Vektorraums:
   Die lineare Hülle in $\mathbb{R}^4$ von

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Ergänzen Sie außerdem Ihre Basisvektoren von $\mathrm{Span}(M)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

c) Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

d) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.