Vortragsübung 9

Aufgabe 1 *Folgen und Konvergenz*
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+3n-2}{-2n^2+2n-6}\right)^{1234}$, b) $a_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,

c) $a_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$, d) $a_n = \dfrac{2^n-1}{n^2+3^n}$.

Aufgabe 2 *Häufungspunkte*

a) Finden Sie Beispiele für reelle Folgen mit folgenden Eigenschaften:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt 1 als Häufungspunkt, aber nicht als Grenzwert.
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt 2 als Häufungspunkt und ist unbeschränkt.
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

Begründen Sie, warum $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt sein muss.

b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte, sowie den Limesinferior und Limessuperior der reellen Folgen:

$$a_n = \frac{n+(-1)^n(3n+1)}{n}, \quad b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 3 *Rekursive Folgen*
Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 4 *Beweisaufgabe*

a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist ebenfalls konvergent.

(ii) Das Produkt einer konvergenten Folge und einer beschränkten Folge ist beschränkt.

(iii) Das Produkt einer beliebigen Folge mit einer Nullfolge ist beschränkt.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge mit genau einem Häufungspunkt a. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a ist.

Aufgabe 5 *Cauchyfolgen*
Sei durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \quad \text{für}\, n \geq 0,$$

eine rekursive Folge in $\mathbb{R}$ beschrieben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Es gilt $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{4}\,|a_{n+1} - a_n|$.

c) Es gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4^n}\,|a_1 - a_0| \leq \frac{2}{4^n}$.

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchyfolge.

Welchen Grenzwert hat die Folge?