Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 10

Aufgabe 1 *Konvergenzkriterien für Reihen*
Untersuchen Sie die Reihen

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^3}$, *b)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)}$, *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

auf Konvergenz oder Divergenz.
Hinweis: Wir wissen bereits, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \ (n \to \infty)$.

Aufgabe 2 *Absolute Konvergenz*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie.

a) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert die Folge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$.
c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|$.

Aufgabe 3 *Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium*
Wir betrachten die Folge

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & k \text{ gerade}, \\ \frac{1}{3^k}, & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass man mit dem Quotientenkriterium keine Entscheidung über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ treffen kann, mit dem Wurzelkriterium dagegen schon.

Aufgabe 4 *Leibnizkriterium*

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2-1}$$

konvergiert.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, positive Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$