Universität Stuttgart
Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 11

Aufgabe 1 *Grenzwert*

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

(i) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$

b) Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie mit den ϵ-δ-Argument, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Aufgabe 2 *Stetigkeit*
Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq 1, \\ \alpha x - 2, & \text{falls } x \in (1, 2], \\ \beta e^x, & \text{falls } x > 2, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3 *Stetige Fortsetzung*
Untersuchen sie, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x^3}{x^2 - 3x}$$

nicht definiert ist, man f durch Zuweisung reeller Funktionswerte stetig fortsetzen kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Funktionswerte.

Aufgabe 4 *Zwischenwertsatz*

a) Sei $I = [0, 1]$ und $F : I \to I$ stetig. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass F einen *Fixpunkt* in I hat, das heißt, dass ein $x^* \in I$ existiert mit $F(x^*) = x^*$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - x$.

b) Ein Zug benötigt für 500 km genau 10 Stunden, fährt also mit 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit. Auf der Strecke fährt er mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und hält öfters. Gibt es während der 10 Stunden einen Zeitraum von einer Stunde Dauer, in dem der Zug genau 50 km zurücklegt?
Hinweis: Betrachten Sie den in der letzten Stunde zurückgelegten Weg $\Delta(t) = x(t) - x(t-1)$ mit $1 \leq t \leq 10$.
Annahme: Der Zug bewegt sich stetig fort, d.h. die Funktion x ist stetig auf $[0, 10]$.

Aufgabe 5 *Lipschitz-Stetigkeit, Hölder-Stetigkeit*
Definition (Lipschitz-Stetigkeit):
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f Lipschitz-stetig auf D , genau dann wenn ein $L \geq 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}|$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt.

Definition (Hölder-Stetigkeit):
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f Hölder-stetig auf D zum Exponenten α, genau dann wenn ein $L \geq 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}|^\alpha$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$$

auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Lipschitz-stetig ist.
b) Sei $I = [0, 1]$ und $0 < \alpha \leq 1$. Für welche α ist die Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Hölder-stetig auf I?