



Vortragsübung 13

Aufgabe 1 Regeln von de l'Hospital

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hospital:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Warum liefert die Regel von de l'Hospital hier ein falsches Ergebnis:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 4}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{2} = 3?$$

Wie lautet der Grenzwert tatsächlich?

Aufgabe 2 Mittelwertsatz

a) Sei $r > 1$ und $x > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$(1 + x)^r > 1 + rx.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right),$$

mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit f' monoton wachsend und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

ebenfalls monoton wachsend ist.

Aufgabe 3 Extremwertaufgabe

Gegeben sei ein Lichtstrahl von $A = (0, a)$ nach $B = (b, -c)$ mit $a, b, c > 0$, der an der x -Achse gebrochen wird. Die Lichtgeschwindigkeit in der unteren Halbebene sei $v_2 > 0$, in der oberen Halbebene $v_1 > v_2$.

a) Angenommen, der Lichtstrahl werde im Punkt $C = (x, 0)$ gebrochen. Geben Sie die Laufzeit $T(x)$ des Lichtstrahls in Abhängigkeit von x an und zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in]0, b[$ gibt, so dass $T(x)$ in x_0 minimal wird.

b) Sei α der Schnittwinkel zwischen der Geraden durch A und $D = (x_0, 0)$ und der Geraden $g: x = x_0$ und β der Schnittwinkel zwischen der Geraden durch D und B und der Geraden g . Bestimmen Sie $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ in Abhängigkeit von v_1 und v_2 .