Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. I. Kröker,
Lukas Brencher M.Sc, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 14

Aufgabe 1 *Taylorentwicklung*
Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, 1)$.

b) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\sup_{x\in[1,1.1]} |f(x) - T_3(f, x, 1)| \leq \frac{25}{12} \cdot 10^{-4}.$$

Aufgabe 2 *Potenzreihen*
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

Aufgabe 3 *Taylorreihen*

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln(x)$$

um $x_0 = 1$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

b) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

um $x_0 = 0$ gegeben ist durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 4 *Anwendungen des Satzes von Taylor*
Sei $y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n^m}\right)^n$$

in Abhängigkeit von $m > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x) = e^x$, die Identität $e^{\ln(a)} = a$ für $a > 0$ und die Taylorapproximation $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$ für $x \to 0$.