Höhere Mathematik II SS 2018
für el, kyb, mecha, phys
Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 4

Aufgabe 1 (Die Gammafunktion)
In der Vorlesung ist die Gammafunktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ über das (konvergente) Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

definiert.

a) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in (0,\infty)$ gilt.

b) Bestimmen Sie $\Gamma(1)$.

c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgaben a) und b).

Aufgabe 2 (Separierbare Differentialgleichungen)
Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

a) $e^y \dfrac{dy}{dt} = t + t^3, \quad y(0) = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dt} - 2ty = t, \quad y(0) = 1.$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{y + yt^2}, \quad y(2) = 3.$

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis)

a) Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   linear unabhängig? Bildet $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bilden die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? Ist $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie eine Basis der Ebene $E : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie außerdem ein Erzeugendensystem von E, das keine Basis von E ist.

Aufgabe 4 (Linear unabhängige Menge).
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ von paarweise linear unabängigen Vektoren ist linear unabhängig.

b) Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.

Aufgabe 5 (Vektorraum der reellen Polynome)
Es bezeichne P_3 den Vektorraum der reellen Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bis zum Grad 3.

a) Seien $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ eine Basis von P_3 bildet. Welche Dimension hat dieser Raum?

b) Beweisen Sie, dass $W = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ein Unterraum von P_3 ist. Bestimmen Sie eine basis von W.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1 und M_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $M_1 \cap M_2$ auch ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

d) Gegeben ist eine Basis $\{a, b, c\}$ von $\mathbb{R}^3$. Bildet das Tripel $x = a + b - 2c, y = -a + c, z = 2b - 2c$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Und ist $\{x, y, c\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.