Universität Stuttgart
Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 5

Aufgabe 1 (Matrizenkalkül)

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $AB = BA$. Zeigen Sie: Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $A = \alpha I$, wobei $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix ist.

Hinweis: Berechnen Sie AB und BA für Matrizen $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, bei der genau ein Eintrag eins ist und alle anderen Einträge null sind.

Aufgabe 2 (Inverse Matrizen)

a) Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls A^{-1}.

b) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 3 (Nilpotente Matrizen)

a) Geben Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $M^2 = 0$ und $\mathrm{Rang}(M) = 1$ an. Gibt es auch Matrizen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\mathrm{Rang}(M) = 1$ und $M^2 \neq 0$?

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $I - A$ invertierbar ist, wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 4 (Lineare Abbildungen und Matrizen)

a) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ und der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (2, 0, 1)^T$, $b_2 = (1, 0, 1)^T$ und $b_3 = (0, 1, 2)^T$. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von L bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3$ und bezüglich der Basis B.

b) Es bezeichne P_3 den Vektorraum der reellen Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bis zum Grad 3. Die lineaire Abbildung $D : P_3 \to P_3$ ist gegeben durch $D(p)(x) = p'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung von D bezüglich der Basis $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ mit $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 5 (Lösungsmengen linearer Gleichungssystemen)
Gegeben sei die "Telefonmatrix"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(A)$ und eine Basis von $\ker(A)$.

b) Bestimmen Sie die algemeinen Lösungen $x, y \in \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssystemen

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Ay = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie $\dim(\ker(B))$.

b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Matrix $M = B + B^T$ symmetrisch, d.h. es gilt $M = M^T$.

   ii) Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$, $L : V \to W$ eine lineare Abbildung und U ein Untervektorraum von V. Das Bild $L(U) = \{L(u) : u \in U\}$ ist ein Untervektorraum von W.

   iii) Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix mit $\ker(A) = \{0\}$. Sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig, dann sind auch $Av_1, \ldots, Av_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.