Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 6

Aufgabe 1 (Determinanten)

a) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mithilfe des Determinantenentwicklungssatzes.

b) Gegeben seien die Vektoren $x = (-2, 1, 1)^\top$ und $y = (2, 0, -2)^\top$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Hinweis: Bestimmen Sie einen Vektor $z \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zu x und y ist, und berechenen Sie das Volumen des von x, y und z aufgespannten Parallelotops.

Aufgabe 2 (Projektionen)

a) Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die sich aus den folgenden Basisvektoren ableitet:

$$v_1 = (-2, 2, 1)^\top, \quad v_2 = (-2, 0, 1)^\top, \quad v_3 = (3, 0, 0)^\top.$$

Sie können die Reihenfolge bestimmen, in der Sie die Vektoren benutzen.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $(0, 1, 1)^\top$ auf $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$.

Aufgabe 3 (Projektionen II)
Gegeben ist die Ebene

$$E : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von E.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung P der Orthogonalprojektion auf die Ebene E bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(P)$ und eine Basis von $\ker(P)$.

Aufgabe 4 (Wahr oder falsch?)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist AB invertierbar, dann ist auch BA invertierbar.

b) Es gilt $\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(BA)$.

c) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

d) Ist A eine Projektion, d.h. es gilt $A^2 = A$, dann ist entweder A nicht invertierbar oder A die Einheitsmatrix.

e) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $A = -A^\top$, dann ist A nicht invertierbar oder n gerade.

Aufgabe 5 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]
Gegeben ist die reelle Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix M_α in Abhängigkeit von α.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(M_\alpha^2)$ in Abhängigkeit von α.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $M_\alpha^2 x = 0$,

i) nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?
ii) zwei linear unäbhangige Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?
iii) genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$?

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).